車の解析力学

佐藤文隆-2019-02-16

目 次

1　二動輪の車の運転

図のような二つの動輪が独立に回転する車を考える (注 1)。変数は $x, y, \theta, \psi_1, \psi_2$ の 5 個である。車の位置（左図の黒丸の点) は左下に示した x, y の座標軸で測られる。θ は x, y 平面の中で車の置かれている向きを表し、x 軸方向からの角度である。

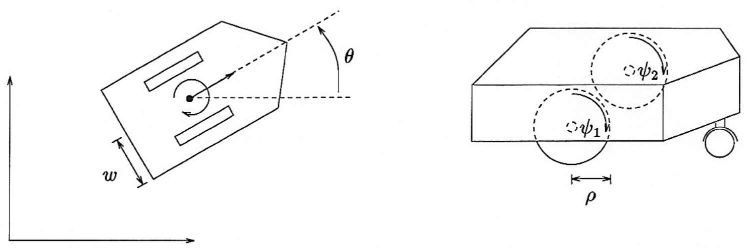

図 1: 二動論平面移動車。左図は上から見たもの。右図で右前の補助輪はこの力学には含めない。

非ホロのミック拘束条件

二つの動輪が独立に回転することで、車は移動しかつ向きを変える。動輪は滑らないという条件から次の拘束条件が導かれる。

$$\cos\theta\delta x + \sin\theta\delta y - \frac{\rho}{2}(\delta\psi_1 + \delta\psi_2) = 0 \tag{1}$$

$$-\sin\theta\delta x + \cos\theta\delta y = 0 \tag{2}$$

$$\delta\theta - \frac{\rho}{2w}(\delta\psi_1 - \delta\psi_2) = 0 \tag{3}$$

この非ホロのミック拘束条件を $\omega^\alpha = \omega_i^\alpha \dot{q}^i = 0$ のかたちに書けば

$$\omega^1 = \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} - \frac{\rho}{2}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) = 0 \tag{4}$$

$$\omega^2 = -\sin\theta\dot{x} + \cos\theta\dot{y} = 0 \tag{5}$$

$$\omega^3 = \dot{\theta} - \frac{\rho}{2w}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) = 0 \tag{6}$$

運動方程式

ラグランジアンと外力 (モーメント τ_i) および拘束条件を未定乗数 λ_α を持ちて書いたオイラー・ラグランジュ方程式は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_w(\dot{\psi_1}^2 + \dot{\psi_2}^2) \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda_\alpha \omega_i^\alpha + \tau_i \tag{8}$$

５つの変数について書き下せば

$$m\ddot{x} + \lambda_1\cos\theta - \lambda_2\sin\theta = 0 \tag{9}$$

$$m\ddot{y} + \lambda_1\sin\theta + \lambda_2\cos\theta = 0 \tag{10}$$

$$J\ddot{\theta} + \lambda_3 = 0 \tag{11}$$

$$J_w\ddot{\psi}_1 - \frac{\rho}{2}\lambda_1 - \frac{\rho}{2w}\lambda_3 = \tau_1 \tag{12}$$

$$J_w\ddot{\psi}_2 - \frac{\rho}{2}\lambda_1 + \frac{\rho}{2w}\lambda_3 = \tau_2 \tag{13}$$

これらを条件を組み入れて変数を減らせば

$$(J_w + \frac{J\rho^2}{4w} + \frac{m\rho^2}{4})\ddot{\psi}_1 + (-\frac{J\rho^2}{4} + \frac{m\rho^2}{4})\ddot{\psi}_2 = \tau_1 \tag{14}$$

$$(-\frac{J\rho^2}{4} + \frac{m\rho^2}{4})\ddot{\psi}_1 + (J_w + \frac{J\rho^2}{4w} + \frac{m\rho^2}{4})\ddot{\psi}_2 = \tau_2 \tag{15}$$

2　内部変数と群変数

対称性による変数の分類

この分野では 5 個の変数 $x, y, \theta, \psi_1, \psi_2$ のうち、ψ_1, ψ_2 が内部変数、x, y, θ が群変数と呼ばれている。内部変数は shape manifold 形状空間とも呼ばれる。「群」変数とは位置を表す平面が $SE(2)$ の群の対称性を持つという意味である。$x \to x+a$,$y \to y+b$,$\theta \to \theta+c$ の変換に対してこの考えている力学系が不変である、すなわち $SE(2)$ の対称性を内蔵しているという意味である。この事情はゲージ理論でゲージ場のある変換に対して力学系が不変であるという事情と同じであり、ゲージ理論的な定式化を可能にするのである。佐藤文隆「車庫入れのゲージ理論」(『数理科学』2000 年 5 月号) という文章に「ゲージ理論」という言葉が登場してるのはこのためである。QCD での漸近自由性でノーベル賞を受賞した Erank Wilzek はこの方面の論文をかいている。魚の泳ぎのゲージ理論などである (A.Shapere and F Wilzek,Gauge Kinematics of deformable body,Am.J,Physics,57(1989),514-518;Geometry of self-propulsion at low Reynolds number,J.Fluid Mechanics,198(1989),557-585)。

制御の観点

方程式 (1)~(15) をどう見るかを考えてみる。

まず動力が運動を決めるという発想からみれば、$\tau_1(t), \tau_2(t)$ が与えられると (14) 式と (15) 式で $\psi_1(t), \psi_2(t)$ が決まる。すると (4),(5),(6) 式を用いて平面状の運動 $x(t), y(t), \theta(t)$ が決まる。

しかし現実の状況は平面上の車の運動と車の向き $x(t), y(t), \theta(t)$ に関する意図が先にあって、それを達成するために動力 $\tau_1(t), \tau_2(t)$ を時々刻々に制御することである。この見方をすれば、mechanics は $\tau_1(t), \tau_2(t)$ を運動 $x(t), y(t), \theta(t)$ に繋ぐ機械学であるという見方が説得的である。

勿論、作用の伝達は各パーツの力の作用で繋がっているから、この機械論的見方でも力学という名称が適当だという考え方もあろう。しかし [質量] $\times$ [加速度] $=$ [力] という力学ではこの問題は錯綜して扱えないであろう。多次元の力学空間を導入する解析力学の威力なのである。

内部変数の制御で実空間内で挙動を決めるという課題はロボット工学のもので、解析力学はそこで現在大活躍なわけである。この力学と放物運動や中心力での運動などの力学のイメージはどこか違う。

3　注

注 1 このモデルは拙稿「車庫入れのゲージ理論」『数理科学』2000 年 5 月号のモデルは下図のものでここでのモデルと違っている。群変数 x_1, x_2, φ、内部変数が α(アクセル).β(ハンドル) である。「上手な」縦列駐車の車庫入れとは α, β の二次元空間（角変数だからトーラス表面に同相）での閉曲線をどう描くかの課題となる。

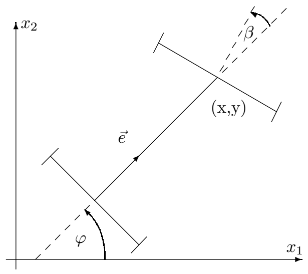

Fig.1 : The coordinates x, y, φ, β .

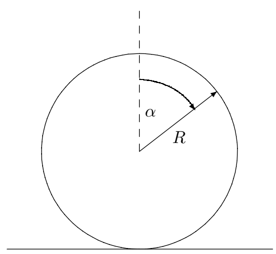

Fig.2 : The front wheel - the coordinate α.

注 2 拘束条件 (1)∼(6) 式は次のように考えればよい。θ 方向速度が次のように平行移動と回転に分解できる。

$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{v_2} = \frac{\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}}{\mathbf{2}}$$