

「プリンキピア」から数理科学のツールへ

目次

1	メカと力	1
2	ニュートンの『プリンキピア』	2
2.1	自然哲学の数学的諸原理	2
2.2	『プリンキピア』の構成	2
2.3	二大発見か？ 一大発見か？	4
3	ニュートン力学の展開	5
3.1	力の染み抜き：ダイナミクス派と関係性派	5
3.2	20世紀初頭の解析力学ブーム	6
3.3	素粒子「標準理論」：力の理論？	7
4	解析力学の現在	8
4.1	「自然をありのまま見ない修行」	8
4.2	落下する猫 問題：変形する物体の運動	8

1 メカと力

mechanics に力学という訳語を明治時代に当てはめた事で一群の mechanics に関わる数理理論のイメージが日本では偏ったものになったのではないかと私は思っている。端的に言えば、力学は物質に働く「力の学問」か（力を含む）、それとももっと広い「作用伝達の学問」かの二つの見方の比較である。力学という訳語は「力」の学という前者の見方に偏らせ、後者のメカニクス（作用、からくり）の学問でもことを翳らしていないか？という危惧である。

今回の特集（追加注1参照）で取り上げられているテーマは、個々の執筆者の意図を審らかにしないが、私には力学を「作用の学問」に拡張して見る視点であると私は受け取っている。しかし、話は現在から視点を遠いところに飛ばしたあとに、もう一度、このポイントに戻ってくることにする。

2 ニュートンの『プリンキピア』

2.1 自然哲学の数学的諸原理

ニュートンの「プリンキピア」が現在の物理学の出発点であること、また、ここで提示された力学の数学的手法が今日の科学技術を支えていること、は広く認識されている。「科学的」とは何かを論ずればきりがないが、ここでの大事な要素は客観性、再現性、明晰性、普及性、厳密性、定量性、などなどであり、数学的手法がこうした点の拡大を支えており、さらにその手法が一定の訓練で習得可能であるという脱伝統文化性（グローバル）や民主主義性（訓練によって万人にアクセス可能）が人類全体の動向にも巨大な影響をもたらした。このは科学の手法の拡大は、社会・文化への影響において、「いき過ぎ」の声もあるが、人類史上そのインパクトの大きさでは稀代のものである。

しかしこの稀代の科学上の名著というこの本をのぞいてみる物理学や数理解科学の専門家は殆んどいないであろう。筆者は「プリンキピア300年」の記念の年であった1987年にあわせて『宇宙論への招待—プリンキピアとビッグバン—』（岩波新書）[1]を執筆する目的で翻訳されたものを読んでみた経験がある。いまでも科学の専門書には「中身はともかく、これを突破出来ない人を振るい落とす」、その事によって専門家への資格試験をしている、ような本がある。この本も発行以後百年近くはそういう役目を果していたようである。そしてこの本の「ごてごてしたくどさ」を縮減する必死の挑戦がその後になされて、学習可能になり、さらにニュートンも夢見なかった解析力学へと発展したのである。

『プリンキピア』を生み出した学問の価値観は出来るだけ簡潔な普遍的原理から森羅万象を演繹することである。実際「プリンキピア」という略称は「自然哲学の数学的諸原理」の「(諸)原理」のラテン語である。だがこの書名が与える印象とは正反対のものである。錯綜した現象の背後にある「原理」が簡潔に述べられていると期待すると「ごてごてしたくどさ」に戸惑わされる。しかし、実はこの期待は全く正しく、この本の構成もそうになっている。ただ「原理」から「現象」を導くことが出来るという例示の部分が量的には大部分であり「ごてごてしたくどさ」であふれているのである。それと手法の根幹である数学の手法が現代的でないので取り付きにくいのである。

2.2 『プリンキピア』の構成

この本はニュートンが44歳頃の作品で、いわゆる発見の「奇跡の年」はこれより20年も前である。この時にはすでにルッカス教授職にあり、当時の年齢からいえば老成した人間の書いた本である [1]。すなわち当時の学者世界のリアクションなどを十分計算した結果、こういう本になっていると考えてよい。

『自然哲学の数学的諸原理』[2]の目次は次ぎの様である。

ニュートンに捧げるハリーの領詞

読者への著者の序文

定義、公理、または運動の法則

第一篇 物体の運動について

第二篇 物体の運動について（抵抗のある媒質中における）

第三篇 世界体系について

「原理」にあたる「定義」、「公理、または運動の法則」は全体の5パーセントにもならない。「定義」は質量、慣性力などで、「公理」にニュートンの三法則がある。「注」として時間空間論がある。また第二版以後には「一般的注解」が最後に付いているが、これは出版後に「旧勢力」からの批判への弁明である。「仮定を立てない」の台詞はここに登場する。科学史的興味からいうと極めて濃縮された興味ある内容になっている。

第一篇はまさに「力学演習」みたいに個別問題への「公理」の使い方である。今風にいうと次のようになる：「数学的準備」（曲線を階段関数の極限として表す）、「求心力を求める」「偏心円錐曲線上の運動は r^{-2} の力による」「 r^{-2} の力で焦点を与えて軌道を求める法」「焦点以外の曲線状の点とか接線とかを与えて軌道を求める法」「与えられた軌道上を時間的にどう動くか」「直線の上昇、落下運動」「任意求心力での運動」「遠日点、近日点が移動する力」「表面拘束運動と振り子運動」「求心力で互いに引き合う球の運動」「球状物体の引力」「球状でない物体の引力」「大きな物体の引力による小さな物体の運動」[1]。

同じく第二篇は次ぎの様である：「速度に比例する抵抗を受ける物体の運動」、「速度の二乗に比例する抵抗の場合」、「一乗と二乗の複合の場合」、「媒質内での円運動がラセン運動になること」、「流体静力学」、「媒質中の振り子運動」、「流体の運動と投射体の抵抗」、「弾性流体内を伝播する運動」、「流体内の円（渦）運動」[1]。

第三篇は演習問題集的な前二篇とちがって「哲学することの諸規則」、「現象」、「命題」と一見するとスッキリしている。しかし「命題」とは「説明すべき事項」のことであり42問程の地学（地球、天文）問題の模範解答集である。

第二篇、第三篇には実験や観測の数表なども多く載っており「原理」と数学的問題解法だけでない。特に、第三篇は「世界（モンド）論」であり、伝統的学問には宇宙論から天体運動や地上現象を演繹する立場もあった。ところがここでは、これら現象を「原理」を使って解ける単なるひとつの計算問題の地位に格下げにしたのである。「プリンキピア」が近代科学としての出発点とされる一つのポイントである。

前記の拙著『宇宙論への招待—プリンキピアとビッグバン—』（岩波新書）[1]では「宇宙論」の展開の観点から『プリンキピア』を論じている。「第三篇」

でいう世界はモンドのことで、この言葉はコスモスやユニバースと異なって価値的な意味合いのない言葉である。拙著ではニュートンのこの転換を「原因としての宇宙」から「結果としての宇宙」への転換ではないかと論じている。その上で、ビッグバンの認識はふたたび「原因としての宇宙」の復権を告げているのではないかと論じている。

しかしここでは『プリンキピア』に内在する別の論点を取り上げる。それは「第二篇」の見方に関することである。

2.3 二大発見か？ 一大発見か？

現代風というと『プリンキピア』は運動法則（三法則）と重力法則の二大発見をした、となる。運動法則に差し込む力は（自然界にあらうがなかろうが）何でもよい。そういう一般理論である。一方、月、惑星、彗星の運行、地上引力、潮汐などの当時の天文・地球現象は r^{-2} の力を仮定した計算問題の答えとしてうまく説明できる。すなわち「世界論」の現象からこの力が発見された、となる。この成功を一つの実例と位置づけてさらに一般的な展望をニュートンは次のように述べている。

「わたしは他の自然現象も、力学の諸原理から同種の議論によって導くことが許されるのではないかと希望を抱いています。と申しますのは、多くのことから、それらの現象もすべてある力に依存するはずのものではないか、その力によって物体の微小部分はまだ知られていない原因で、あるいはたがいに相手方に押しやられて規則正しい形に凝集したり、あるいはたがいに反発し斥けあったりするのでないか、そのような力がまだ知られていないために、哲学者（科学者）たちはこれまでむなしく自然を追求してきたのではなか、と想像させられるからです」[2]。

このような現代では当たり前スタンスこそが『プリンキピア』が現代物理学の出発点だという意味である。そのうえで一步深入りすると、古くから出沒する問題に出会う。ここで答えが現象に合わない場合にどうするか、修正すべきは運動法則か r^{-2} の重力法則か？、という問題が発生する。「哲学することの諸規則」はそのことを念頭に入れており、数少ない公理と説明できる現象の広さという常識的物差しを提示している。しかし歴史的には前者（運動法則）は不変で、新たな力を追加して現象を説明してきた。この事情を考慮すれば「二大発見」といった並列的見方ではなく、「公理」（運動法則）は格が一つ上だから「一大発見」だという見方にもなる。

第一篇、第二篇の演習問題集の課題を見ても分るように力の種類は自由に（というより解けるケース）を考察している。すなわち力自体のあり方（何故逆二乗か？）に深入りしていない立場である。当時の反応でもその説明がないではないかという「哲学者・神学者」からの批判があった。これに対して「仮定は立てない」という態度をとった。そこが説明できないから運動法

則が不完全だとか、世界論の説明がまだ完成していないという見方を退けるのである。すこし過激化していうと「運動法則はいじらずに現象にあう力を捜してこい」、「運動法則は力を捜すツールである」となる。「運動から力発見のマニュアル」として運動方程式がある、という見方である [追加注 2]。

3 ニュートン力学の展開

3.1 力の染み抜き：ダイナミクス派と関係性派

力という言葉は強い印象をもつ日常語である。クオークといった単なる符号ではなく、いろんな連想を生み出す濃い味の染み込んだ言葉である。このことは force や kraft といったヨーロッパ語でも同様である。そして『プリンキピア』以降、この理論の自然哲学としての位置づけにおいてもこの点は重要な問題だった。この血と汗の染み込んだ動因としての日常語「力」から余計な意味合いを引き算してニュートン力学での概念に純化していく染み抜きの過程が 19 世紀までであった。『プリンキピア』後の 18 世紀後期までは、力、運動量、モーメント、運動エネルギーなどが混同して使われており、歴史的な経過を正確に表現するのは複雑である。

いま、ヤンマーの「力の概念」[3] を参考にして大雑把に経過をみると、動因としての力を中心に見る派はライプニッツから始まり、ボスコビッチ、カントらが続く。そして、この派の対極にあるのが力を中間項概念とみなすのが、バークリ、ヒュームらの反実在・実証主義派に端を発して 19 世紀後半に盛り上がりを見せたマッハ、キルヒホッフ、ヘルツ等の力学観である。科学は「記述する」であるというキルヒホッフの言辭が 19 世紀末に流行った。ヤンマーにしたがって前者をダイナミズム派、後者を関係性 (relational) 派と呼んでおく。

ニュートン自身は、デカルトやライプニッツらと違って、倫理問題などに踏みこむ哲学全般に関わる議論を避けていた。また遠達力である重力の「原因」や、太陽系の初期条件には、「仮説を立てず」とか「神の一撃」とかいうキャッチフレーズ以上の考察はしなかった。むしろ、時間空間、運動、力の相互依存性を強く認識しており、どこかで絶対性の導入を深く理解しておりそれ主張した。どんな事物を受け入れても時間空間は影響を受けない絶対時空を想定した。そういう器としての時間空間と違って、ライプニッツは事象が生起する経過の表現として構成されるものと時間空間を想定した。

ダイナミズム派の見方は、事物の動因、原因、活力、エネルギー、意思、個物などの表出の姿として力学をみる。こうした態度は、神に代わって人間を真理の中心に据えた近代合理主義全般の哲学体系の構築という力学に閉じない課題がその背景にある。まだ両方にまたがって活躍している学者が多い時代であった。例えば、ライプニッツは調和のとれた現実を攪乱要因として

力をみる立場もあった。ライプニッツは「予定調和」という超越原理を立て、眼前の不調和を力と関連させた。

それに対して関係派は「哲学時代以後」の産物であり事物の関係性を「記述する」を主眼にしている。例えば質点群の配置の変動を解く問題で「加速度に質量をかけた量を中間項として導入するのが問題解法に有効（便利）である」といった見方である。こういう反形而上学的、経験主義的、実証主義的、言語論的な傾向は二十世紀の哲学界を席卷した。この傾向は量子力学の定式化にも一定の影響を与えた。

しかし、20世紀後半の物理学自体は実験の進捗でミクロの世界を生々しく捉えて大躍進した。表層の背後に現象を支える法則性を背負った実在があるという実感を再確信していくかたちで拡大前進した。

したがってこの時期の物理学の進展は、哲学界の流行思想とは正反対に、実在論的、統一理論といった形而上的原理、の優勢で進行した。新世界発見の時代であった。このため20世紀流行哲学の先鞭をきったともいえる物理学者「マッハ、キルヒホッフ、ヘルツ」等の力学批判のながれが突如として消えた。既存のツールの「批判（省察）」よりは研究界の目は新しい世界の「探索」に集中したからである。さらにヨーロッパ社会情勢の激動も絡んでいた。私はマッハとプランクを対比してこういった問題を論じているが、本題から外れるのでこの程度にする [4]。

3.2 20世紀初頭の解析力学ブーム

話が飛ぶようであるが、ハイゼンベルグの行列力学でもシュレーディンガーの波動方程式でも、量子力学の定式化の発見において解析力学が重要な役目を果たした。正準交換関係やハミルトン・ヤコビ方程式などである。最近の物理学科の力学の講義がここまで高度な解析力学を教えているのか疑問である。少なくとも当時の理論物理学者の解析力学の素養は相当なものであった。

例えば、1900年、ボルツマンが学生であったエーレンフェストに与えた研究テーマは流体力学の方程式を変分原理で書くことだった。非圧縮性の場合にはリー群の対称群と絡んだ変分原理となる。こういう研究はエーレンフェストの学生であったカシミアの学位論文研究として与えたテーマ剛体の量子力学に引き継がれる（1931年）。またプランクが1909年のアメリカ訪問で行った物理学の集中講義でも最小作用原理が取り上げている。アインシュタイン方程式の変分原理ヒルベルトが1916年、対称性と保存則のネイター定理が1918年である。

当時の理論物理学の重要課題として解析力学、最小作用原理などが受け取られていた。科学的にプランクを描くと黒体放射の量子論の発見者となり、彼が物理学の理論的統一性を目指していたこういう考察が見えてこない。1906年にプランクはアインシュタインの相対論力学を変分原理で定式化し

ている。特殊相対論を直ちに高く評価したのも、最小作用原理への傾倒があったと言っている。プランクは、ランダウ・リフシッツのように、体系的教科書の創始者としても有名である。

3.3 素粒子「標準理論」：力の理論？

今から 30 年近くさかのぼった 1974 年から 80 年代の中頃にかけて、素粒子物理学は大きな前進し、「力の統一理論」と呼ばれる。この「力」と古典力学の力学の「力」は、互いに影響を及ぼす作用としては同じだが、ずいぶん違った外観である。しかし、1980 年以後の物理学を目指す世代にはこのメッセージが伝わり、その前の世代と差があると思う。ともかく 17 世紀の重力と 19 世紀の電磁力に加えて、20 世紀初頭からの放射線の発見で登場した原子核に関した力を含む「四つの力」の統一理論が完成した。というよりこの「力」で物質を整理したのである。素粒子物理学の研究は、理論も実験も日本が世界のセンターの一つであるという事情もあり、大きなイパクト与えたと思う。「力」を中心に物理学をイメージしたのではないかと思う。

もちろん高校や学部教育での力学は昔ながらのスタイルを変えていないし、力は斜面から受ける抗力であったり摩擦力であったり遠心力であったり、重力や電磁気力であったりする。力学の力はどんな力でも差し込めるスロットであり、具体的な力に依存しない一般理論である。この古典力学のこのイメージはもちろん一般に普及している常識的な見方であろう。

ところが時々そういう常識的な見方の浅はかさを指摘する「過激派」が現れる。この二つの「力」に関する対抗軸の両端は次の二つである。一つは「四つの力」原因説とでも言うべきもので、ミクロマクロ含め物理現象がすべてこれで起動されている以上、原理的には古典力学も力の統一理論に組み込まれているとする。勿論いちいち第一原理から導出するのは経済的でないから、実用上（力を勝手に付け替える）古典力学がある、という見方である。「四つの力原因説」と言ってよい。

もう一つは一般理論としての力学をツールとして自然にある力を整理整頓して探し出されたのが「四つの力」であるというものである。「四つの力」結果説と言ってもいい。一般理論の枠組みの中において浮かび上がったという意味である。

ここでは力学対象が有限自由度か無限自由度の連続体か、古典力学か量子力学か、といった数理、情報処理上の問題も絡むがそこにはいま深入りしていない（追加注 3）。量子力学のイメージも、昔は原子分子や核・素粒子の力学というミクロの存在の力学といものであった。箱型ポテンシャルなどは演習問題であって現実には存在しないものだった。ところが、研究が進展するにつれて剛体や流体力学の量子論や量子ドットなどのナノテク絡みの分野では、いわば古典力学での斜面や壁との衝突のような演習問題が現実になって

いる。量子力学でも「力」(ポテンシャル)は古典力学並みに自由に差し替えることが出来るものである。量子力学でも「力の原因説」から「力の結果説」に移行している。原子分子が量子力学を支えているのではなく、量子力学に支えられて原子分子があるのである。

4 解析力学の現在

4.1 「自然をありのまま見ない修行」

京大で基研から理学部に戻り学部生にする講義としてはたまた解析力学があたった。2回生後期のこの授業を十数年続けたが、初回に「解析力学は自然をありのままに見ない修行」だと言っていた。この講義をネタにした本の帯にはこの文句が登場している [5][6]。

解析力学で強調すべきことは「運動」は人工的空間に於けるものだという事である。二冊目の本 [6] には「物理的空間と人工的空間」という章を設けてこの区別が重要であることの説明にあてた。一質点問題ではこの二つの空間の区別を混同してもいいので、量子力学の状態関数(シュレーディンガーの波動関数)は人工的空間上の関数であることが徹底しないのである。

一方、ポアンカレ群のような対称性は物理的空間についてのものだ。この物理的空間の性質の反映として人工的空間での量の保存則がある。多粒子の足し算は人工的空間の次元での足し算である。こういうことを「自然をありのまま見ない修行」と言っている。

力学を「物理的空間での運動を初期条件で決める」というような、直観に訴えた教え方では不十分である。そういう見方は教えなくても分っている。また「初期条件」というのも狭い見方であり、 q と p の始状態、終状態で、条件の与え方は都合四通りある。例えば配位空間での変分原理では q の「始」と「終」を固定して軌道を変分原理で選ぶ。しかし位相空間ではこの「両端固定」の自由度が増える。こういうのが正準変換の母関数が増える理由だ ([6] の 42p)。

「初期条件」が醸し出す過激派思想は力学を「原因」があって運動があるというダイナミズム説のしっぽの残存につながる。微分方程式は境界条件に対して中立である。その自由度を駆使するのが数理である。変分原理は始点、終点間の軌道を選択するという、時間発展的でない、見方になっている。この発想がライプニッツの予定調和に通じるのである。

4.2 落下する猫 問題：変形する物体の運動

拙著『対称性と保存則』[6] の表紙は下図のように「落下する猫」の絵である。猫は足を上向きにして落とされてもチャント足を下向きにして着地する。

この問題で”落下”は実は本質と関係なく、この間は無重力で外力が働いていない状況であることが重要である。外力が無いのに、空間のなかで宙返りする不思議さがポイントである。ちなみに剛体なら外力（モーメント）なしでは回転できない。手を離す初期条件として外部から剛体にモーメントを与えたのでもない。猫の自力で回転したのである。ポイントは猫は剛体でなく変形する物体であるところがミソである。身体をくねらせることで宙返りを果している。



こういう変形する物体の空間での振舞いの問題はロボットなどの制御工学の課題であると同時に水泳、分子変形、尺取虫、蛇、魚、などなど、数多くの現象を含む。最近ではスポーツ科学での課題でもある。この問題は従来の力学の用語で言うと非ホロミック拘束問題であり、力学空間（配位空間、位相空間など）のファイバーバンドルの問題であり、見方によってはゲージ場の数理問題である。数理科学の重要な課題でもある。

この課題の一端を以前本誌に「車庫入れのゲージ理論」[7]として書いたことがある。二次元平面上で場所 (x, y) と向き ϕ を変えるのが”車庫入れ”である。車輪の前進後退を繰り返して横歩きのような”車庫入れ”が可能である。これは車が猫のように”変形する”物体だからである。形状変形の変数としては例えばハンドル操作で決める車軸方向 α に取ればいい。変数としてはこの外に車輪の回転角 θ が最低一つ要る。こうして、都合、変数は5個 $(x, y, \phi, \alpha, \theta)$ である。その内の (x, y, ϕ) は二次元ユークリッド群 $SE(2)$ の対称性をもつ。残りの二つ (α, θ) は形状 (shape) 変数と言われる。そして車輪を回せば車が動くからこれら5個の変数の間にはある拘束条件が課せられている。このためにこの5次元空間は二次元の形状空間と対称性のある三次元のファイバーバンドルに分解できる。そして拘束条件のために、底空間 (α, θ) での変動とファイバー上の変化が関係付けられている。そして間を取り持つ

接続係数 (connection) が導入される。ゲージ場というのはこの接続係数に当たる。しかも車庫入れではこの群は非可換だから非可換ゲージ場である。

この車庫入れの問題の具体的解法は先の拙文 [7] を参考にして貰うとして、ここでは ”落下する猫” 問題を少し一般化して述べてみよう。この問題のラグランジアンは $L([場所],[方向],[形状])$ である。この内 ($[場所],[方向]$) は一般には三次元ユークリッド群の対称性を持っている。 $[形状]$ の変形は $h_{ij}(x)$ のような計量テンソルで表現される。ここでの座標 x に対しての微分同相である。すなわち

$$L(X, \Theta, h_{ij}(x))$$

のようになっている。全体の変数空間 Q が対称群 G で Q/G の力学系に縮減される。こうして全体の問題が底空間上の力学とファイバー上の移動という対称群による変換に分割される。こういう見方での展開の中にモーメンタム・マップ、オイラー・ポアンカレ方程式、などの話題がある。

この話を聞いてダイナミズム派的に現象を考える人は、「このラグランジアンでは肝心の車輪が回る動力が入っていないから力学でない」と言うかも知れない。確かに、車庫入り問題を例に言うと、ダイナミズム派的には ”真の” 力学変数である α (ハンドル操作) や θ (車輪の回転) がどう変化するか肝心の ”動因 (エンジン、ハンドル)” を含めていない。単に α と θ の変化が x, y, ϕ にどう反映されるかの ”関係” だけを論じている。

制御問題とは x, y, ϕ の振る舞いに付いての要請 (目的) が先にあるその為に α, θ をどう変化させたらいいかと言う設定の課題になっている。「だから動因から始まる力学でない」とも言えるし、力学の原理がそういう関係を記述することにも役立つのかと啓蒙されるきっかけにもなる (追加注 4)。

これで冒頭に述べた「メカと力」の問題提起に漠然と戻ったと思う。ともかく α, θ の力学が運動の動因だと思う発想では車はうまく車庫に入らない。

注

1. 佐藤文隆『宇宙論への招待—プリンキピアとビッグバン—』(岩波新書) 1988年
2. 河辺六男訳『世界の名著 26巻 ニュートン』、中央公論社、1971年
3. M ヤンマー『力の概念』高橋 毅、大槻義彦訳、講談社、1979年
4. 佐藤文隆『アインシュタインの反乱と量子コンピュータ』京大学術出版会、2009年
5. 佐藤文隆『運動と力学』(岩波講座「物理の世界」)、2001年
6. 佐藤文隆『対称性と保存則』(岩波講座「物理の世界」)、2004年
7. 佐藤文隆「車庫入れのゲージ理論」、『数理科学』443巻 (2000年)、4月、36-40 p

追加注 1

この文章の元は『数理科学』2004年8月号特集「古典力学の新展開 ～力学的自然観と現代物理のツール」に載ったものである。この特集号の構成は次の通り。この文章は、本ブログの趣旨に沿って、『数理科学』に掲載されたものから改稿してある。

横山雅彦 「プリンキピア」

中村孔一 最小作用原理

高木隆二 質点から剛体、連続体の力学へ

大森英樹 数学的時空、相空間

北原和夫 非平衡熱力学とリュービル方程式

村井信行 対称性、保存則、非ホロノーム

相沢洋二 古典力学の革新 大域的構造と現象

追加注 2

近年、銀河スケールから膨張宇宙のスケールでの運動から推定される「力」の源（ソース）の推定と「運動」以外からの源の推定が合わない観測が明らかになり、そのギャップをダークマターやダークエネルギーという源の存在として問題化しているが、運動方程式の修正もあり得るのである。

追加注 3

量子力学は \hbar を含むオペレータに関する部分と \hbar を含まない状態ベクトルに関する部分の二部構成であり、後者は「 \hbar のない量子力学」であり、一種の情報理論であると唱えている。拙著『アインシュタインの反乱と量子コンピュータ』第5章、『量子力学は世界を記述できるか』第4章、青土社。

追加注 4

「制御と解析力学」「ロボットと解析力学」「スポーツ科学と解析力学」などは今では繁盛してる数理科学で邦書もあが、結構な高等数学である。今後このブログでは別項で「ブランコ漕ぎ」を取り上げることにする。

古典的には F.Wilczek and A Shapere, Geometry of self-propulsion at low Reynolds Number, J of Fluid Mechanics, v198,557,1989 ; Richard Montgomery "Gauge Theory of the Falling Cat" 1993