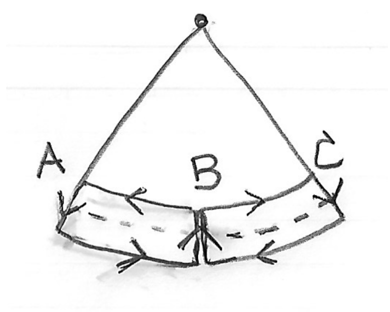
ぶらんこ漕ぎ

佐藤文隆-2019-02-16

目 次

1　ブランコの振動に同期した重心の上げ下げ

ブランコの小さな揺れが，他から押してもらうことなく，ブランコに乗っている人の自力で，しだいに大きく揺らすことができる。れてくる。いま、人の行動を簡単化して、「操作」は身体の重心の上げ下げで行うとし、上げ下げを前後の静止時と，一番低いときの 3 か所で瞬時に行うことにする。左右の揺れを効果的に大きくするには、左の静止時 A に重心を「下げて」、一番低い時 B に「上げて」、右の静止時 C に「下げる」を繰り返せば良いことがわかっている。図のように、A→B→C→B→A の 1 サイクルの「操作」で元の状態に戻ったときにエネルギーが増加するのである。



エネルギーの出し入れを考えてみる。まず重力のもとで重心の上げ下げではエネルギーの増減があるが、1 サイクルでは増減帳消しになる。ところが、B で「上げる」場合には重力以外に遠心力が加わっており、さらに B では 1 サイクルの 2 回とも遠心力に抗して「上げる」だからブランコにエネルギーを与えていることになるのである。これでブランコのエネルギーは徐々に大きくなり，揺れの振幅も大きくなるのである。

このブランコ漕ぎでブランコが得るエネルギーは次のように計算できる。ブランコの支点から重心までの長さを R とすると，単位質量あたりの遠心力は v^2/R である。さらに、「上げる」過程で R が $R-d$ に瞬時に変化するとする。この作用で横向きのトルクは働かないから、作用の前後での角運動量 $J = vR$ は保存する。作用前の速度を V とし作用後の速度を V' とすれば、$VR = V'(R-d)$ である。したがって単位質量あたりのエネルギー変化 ΔE は

$$\Delta E = \frac{V^2}{2}(\frac{R^2}{(R-d)^2} - 1)$$

あるいは「遠心力に抗して」上げるエネルギーを直接計算することも出来る。すなわち

$$\int_R^{R-d} \frac{v^2}{r} dr = \int_R^{R-d} \frac{J^2}{r^3} dr = \frac{J^2}{2}(\frac{1}{(R-d)^2} - \frac{1}{R^2}) = \frac{V^2}{2}(\frac{R^2}{(R-d)^2} - 1$$

となり、前の ΔE と一致する。

実際の状況では d が R に比べて十分小さく、小刻みにエネルギーをブランコ系に注入していくとことになる。この近似をすれば，1 サイクルでエネルギーは

$$E \to E + \Delta E \simeq E(1 + \frac{d}{R})$$

のように増加する。サイクルを繰り返せばエネルギーは複利的に増加する。B を通過する回数を N とすれば

$$E \to E(1 + \frac{d}{R})^N$$

となる。$d \ll R$ で N が十分大きければ、

$$E(N) \simeq E(0)\exp(\frac{d}{R}N)$$

となる。ここで E はサイクルでの最速時、すなわち B での運動エネルギーである。

ここでこのエネルギーがどこからきたかを考えてみる。もちろん、ブランコを漕ぐ人がブランコに与えたものである。比喩的に言えば筋肉をとうしてした仕事であるから「お腹がすく」ことでエネルギーを供給しているのである。だが何処かしっくり感じを持つかもしれない。重力の作用は「1 サイクルでは増減帳消し」という場合、A と C での「下げて」ではエネルギーを人が

得ており、これを B での重力に抗して立ち上がるエネルギーに振り分けられるとしているが、どこか現実的でないと？。このモデルはブランコと人から構成されるが、力学で扱うのはブランコの方だけで、この力学系のパラメータ（この場合は重心の位置）を変える人という外部系が作用するということである。ここでブランコ系のパラメータの変動を「手で入れ」てその効果をブランコの運動方程式で扱うのである。変動を実行する人を力学系としては扱っていないのである。

2　その他のモデル化

2.1　パラメトリック増幅

上のモデルではブランコの乗り手を質点で代表させてあるから、実質、ぶらんこのロープの長さを同期した伸縮させるモデルと同じである。線形振動の範囲でラグランジアンと運動方程式は

$$L = \frac{m}{2}(\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\ell}^2\theta^2) - \frac{mg\ell}{2}\theta^2$$

$$\ell\ddot{\theta} + 2\dot{\ell}\dot{\theta} + g\ell\theta = 0$$

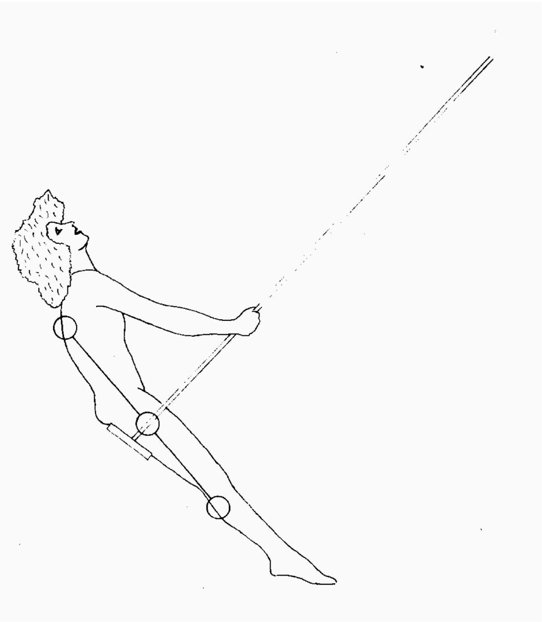
ここでロープの長さ ℓ を $\ell = \ell_0 - d\sin\omega t$ のように変化させる問題である。$\epsilon = \frac{d}{\ell_0} \ll 1$ の場合には $\omega = 2\omega_0$ で共振して。振動しながら振幅がゆっくり増加する

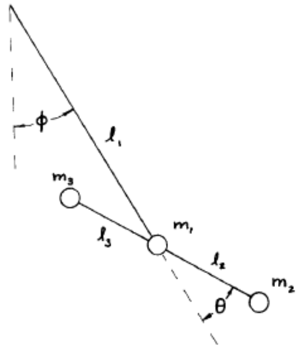
$$\theta \approx a_0 \exp(\frac{3}{4}\epsilon\omega_0 t)\sin\omega_0 t$$

のような解が存在することが知られている。周期的なロープの変動のさせ方が違っているのだから、係数までは一致しないが、上の場合と同じように振動しながら増幅することが示される。パラメトリック増幅と呼ばれている。

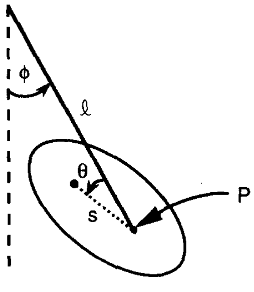
2.2　身体を前後に揺らす

ぶらんこ漕ぎをパラメトリック増幅問題に還元してしまうと現実のぶらんこ漕ぎのイメージが失われる。大きな身体を質点で扱えたのはブランコに対して姿勢を変えないとしたからである。しかし実際には板に座り、そこを支点に身体を揺らす場合もある。また板の上に立って身体を前後に揺する場合もある。次のページの上の二つの図は前者（座り）、下の図は板に立って揺する場合である。いずれの場合も θ を同期して変動させる。図は W.B.Case and M.A.Swanson”The pumping of a swingfrom seated position”,Amer. J. Physica,58(1990)463-467; W.Case,”The pumping of a swing from the standing position”,Amer. J. Physics,64(1996),215-220.





ϕ
l_1
m_3
l_3
m_1
l_2
m_2
θ



ϕ
ℓ
θ
s
P