インピーダンス整合条件とブリッジ平衡条件

北野 正雄

平成 13 年 7 月 24 日

インピーダンス整合条件のような簡単な問題に 10 通り近い解法があるのは驚くべきことである [1, 2]. 特に, [2] に示されている幾何学的解法は, ほとんど計算なしに結果に到達できる興味深い方法である.

ところでこの方法の最終的な図 ([2] の図 3) は, 抵抗ブリッジ回路の電流電圧平面における表現 (四角形分割) と同じ形になっている (図 0) [3]. とくに整合のために 0 にすべき, 真中の四角形の面積は, ブリッジ中辺の抵抗での電力消費に対応している. このことから, インピーダンス整合と, 抵抗ブリッジの平衡には何らかの関係があるものと想像される.

以下，図に沿って説明する.

- 図 1. 電源電圧を E, 内部抵抗を R_0, 負荷抵抗を $R = kR_0$ とおく. 整合は k を変化させて, 負荷抵抗での消費電力を最大化する.

- 図 2. 内部抵抗 R_0, 負荷抵抗が $R = (1/k)R_0$ の場合を並列に接続する. kR_0, $(1/k)R_0$ の電力は等しいことに注意する. したがって, k を変化させて一方を最大化すると, 他方も同時に最大になる.

- 図 3. さらに, 上のブリッジを 2 つ用意して並列接続する. ここで, 中央 2 辺の上下を反転する. さらに電位の等しい点を図のように接続する. 電位が等しいので, 回路の状態は変化しない. こうして出来た, 短絡された 2 つのブリッジの上辺をそれぞれ入れ換える. この操作も回路には影響を与えない.

- 図 4. 中央の 2 辺 (R_0 のみからなる) は等価的に, 1 つの抵抗 R_0 に置き換えることができる. これは,

$$V_1 = \frac{k}{1+k}E, \quad V_2 = \frac{1}{1+k}E \tag{1}$$

および

$$I_1 = I_2 = \frac{1-k}{1+k}\frac{E}{R_0} = \frac{V_2 - V_1}{R_0} \tag{2}$$

であることから分かる (電位差 $V_1 - V_2$ に比例した電流が流れている).

- 図 5. このようにして得られたブリッジは一般には平衡していないが, つぎのような性質を持つ. 合成抵抗は, R_0, したがって, 全体の電力は, E^2/R_0. 4 辺の各抵抗での消費電力は等しい. さらにこの電力は図 1 における負荷の電力に等しい.

  これらのことから, ブリッジを平衡させる, すなわち, $k = 1$ の場合が中央辺における電力消費が 0 となって, 残りの抵抗における電力が最大になることがわかる.

- 注意. 図 2, 3, 4, 5 の全消費電力は, それぞれ, E^2/R_0, $2E^2/R_0$, $2E^2/R_0$, E^2/R_0 である. 図 4 から 5 で電力が減少したのは, 中央 2 辺を通り抜けている電流の寄与が消えたためである.

  図 2, 3, 4, 5 のすべてにおいて, 抵抗 kR_0, $(1/k)R_0$ の消費電力は等しい.

  図 5 のブリッジの全抵抗は, R_0 であることは, 式 (1), (2) から求められるが, 図 0 を用いれば自明である [3].

このようにインピーダンス整合による電力の最大化の問題をブリッジの平衡問題に変換することができた.

この手法は, [2] に示されている幾何学的手続きを回路上でなぞったものにすぎない. しかし, 全く関係がないように見える 2 つの問題を結びつけるという点では興味深いものがある.

参考文献

[1] 霜田光一: 多解答設問のすすめ, 物理教育 Vol. **83**, No. 3, 58 (2000)

[2] 霜田光一: インピーダンス整合の幾何学的解法, 日本物理教育学会 第 18 回研究集会 (2001.8.10) 予稿集

[3] 北野正雄: 電子回路, p.6 (培風館, 2000); 表紙の図も.

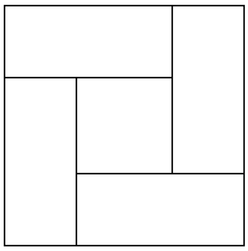

Fig. 0

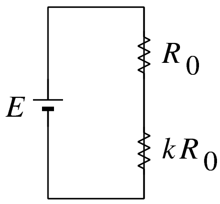

Fig. 1

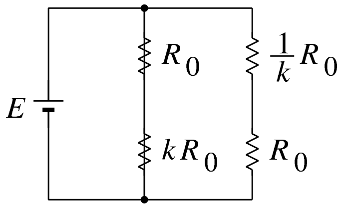

Fig. 2

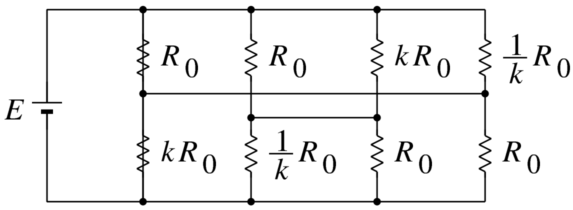

Fig. 3

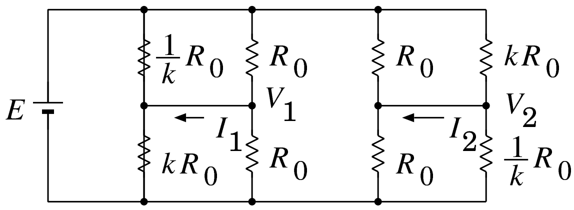

Fig. 4

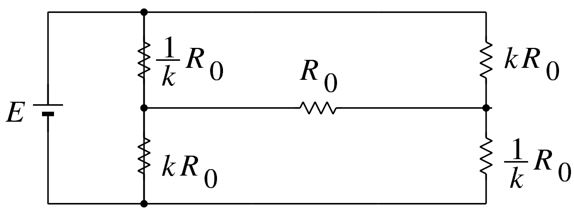

Fig. 5