数学セミナー 1 月号 2021 年 pp. 24–29 著者最終版 2.0

エンタングルメントとベルの不等式

北野 正雄

京都大学名誉教授

だがこの実験は通常とは違って, 問題の数を含む量子ビットを, 計算の各ステップでコンピュータ内の別の, 余分なキュービットと故意に絡みあわせた. 結果として, そのとき計算を行っているセクションは純然たる量子状態ではなくなって, ふたつの数を同時に含んでいるようにではなく, 単に同率の可能性でどちらかひとつを含んでいるかのようにふるまった. この結果は, 機械全体が不完全な遮蔽のせいで周囲の物体と絡みあってしまった場合とまったく同様, 計算の量子的性質を根底から崩すものだ.
グレッグ・イーガン著, 山岸真訳「ひとりっこ」, (『ひとりっこ』(ハヤカワ文庫 SF, 2006) 所収)

*　*　*

1　状態のもつれ

量子系におけるエンタングルメントの存在は, 理論の自然な要請である. 例えば, ヘリウム原子中の 2 つの電子がエンタングル状態にあることは抵抗なく受け入れられている. しかし, 2 つの系が隔離され, 相互作用がなくなった状況にあっても, エンタングルメントが保持されることは日常感覚, つまり古典力学的世界の常識では理解しがたい. シュレディンガーはエンタングルメントの存在が腑に落ちず, 量子論の研究に対する熱がすっかり冷めてしまった. また, アインシュタインが量子論は完全な理論となり得ない主張する根拠ともなった [1].

量子論では, 1 次元上の粒子は波動関数 $\psi(x)$ で表され, $|\psi(x)|^2\mathrm{d}x$ は粒子が x と $x+\mathrm{d}x$ の間に見いだされる確率を表す (2 乗積分が 1 に規格化されているとする).

1 次元上の 2 つの粒子 a, b の波動関数が $\psi(x_\mathrm{a})$, $\phi(x_\mathrm{b})$ のとき, 全体系の波動関数は

$$(\psi\otimes\phi)(x_\mathrm{a},x_\mathrm{b}) := \psi(x_\mathrm{a})\phi(x_\mathrm{b})$$

と表される. $\otimes$ はテンソル積と呼ばれる. 粒子 a が位置 x_a 付近に見いだされ, かつ粒子 b が位置 x_b に見いだされる確率は $|\psi(x_\mathrm{a})|^2\mathrm{d}x_\mathrm{a}\times|\phi(x_\mathrm{b})|^2\mathrm{d}x_\mathrm{b}$ であることから, このように定義することは理に適っている.

重ね合わせの原理から, テンソル積の和

$$\psi_1(x_\mathrm{a})\phi_1(x_\mathrm{b})+\psi_2(x_\mathrm{a})\phi_2(x_\mathrm{b})$$

も波動関数の資格を持っている (規格化は必要). このような関数は, $\psi_1=\psi_2$, または, $\phi_1=\phi_2$ でなければ, 1 つのテンソル積にまとめることはできない.

この事実は見かけ以上に深刻な問題をはらんでいる. それは, 粒子 a を x_a に見出す確率が, 粒子 b をどこに見出したかによって変わりうるということである. 量子論では部分系に対する波動関数が存在しえない状況が一般的なのである. これをエンタングルした (もつれた, からまった) 状態と呼ぶ.

2　光子の偏光

本稿では, エンタングルメントの例として, 光子対の偏光状態を取り上げるが, まず, 偏光について復習しておこう. スマホやパソコンの液晶画面では, 偏光を利用して各ピクセルの明るさが制御されている. ミツバチは偏光を見分ける能力があり, 大気のレイリー散乱の異方性による天空の偏光パターンを利用することで, 太陽が直接見えない状況でも迷子にならない. 人間の眼もわずかに偏光を感じることができる. 液晶画面のような, 偏光した白色の面を凝視すると, 偏光軸に沿った黄色い蝶ネクタイのようなパターン (ハイディンガーのブラシと呼ばれる) が視野の中心に見られる.

直線偏光が直線偏光板を通過する際, その透過率は光の電場と偏光板の透過軸の間の角度 θ で決まり, $T=\cos^2\theta$ である. 古典的には, 透過に際して電場ベクトルが透過軸方向に射影されて、その大きさが減少することで簡単に説明がつく.

しかし, 光の強度を弱くして, 光子が 1 つずつ入射するような状況を考えると, 話はむずかしくなる. 周波数 ν の光子 1 個のエネルギーは $h\nu$ である (h はプランク定数). 量子論によれば, 光子の切り売りは許されないので, その一部のエネルギー $Th\nu$ が透過していると考えることはできない. 唯一の可能な解釈は, 光子が偏光板に到着するたびに, くじが引かれ, 当たりの場合のみ通過が許されるというものである. 当たりくじの確率が透過率 T だと考えると, 多数の光子に対して古典的な結果が再現される.

数学的には, 測定結果にバラつきが生じるのは, 測定 (操作) に対応する演算子の非可換性に帰着される. 今の状況でいえば, 2 枚の偏光板を重ねる順序によって, 透過率や偏光軸が異なるということである.

3 隠れた変数

偏光板に光子が入射するという基本的な設定においてさえ, 確率的事象が生じるのは不思議なことである. 現在でこそ, 量子論の確率解釈は当然と思われているが, 決定論への信奉を破る考えであり, その受け入れまでには多くの議論が必要であった. アインシュタインの有名な「神はサイコロを振らない」は彼の確率解釈への不信を端的に表している.

対案として考えられるのは, 偏光板の前に到達した光子の運命は神の振るサイコロによってではなく, それぞれが密かに保持している通行証の情報に基づいて決められているという考えである. 通常の偏光の状態以外の情報が保持されているのだが, 我々がそれを知らないために現象がランダムに見えているというのである. これが「隠れた変数 (hidden variable)」モデルと呼ばれるものである. 今の例でいえば, 各光子が一様なランダム変数 $\lambda \in [0,1]$ を持っていて, $\lambda < \cos^2\theta$ の場合のみ通過が許されるとすれば実験結果を再現できる.

量子論に確率が必要になるのは, 隠された変数に対する無知が原因であって, それを含む新たな理論が確立されれば, 古典論的決定論が回復できるという魅力的な考え方である. しかし, この方向での解決は困難であることが示された. 自由度 3 以上の量子系に対しては, 先の偏光の場合のようには, 適切な隠れた変数モデルは作り得ないことが証明されたのである [2, 3]. ただし, 測定によって隠れた変数は影響を受けないという仮定 (non-contextuality) がおかれているが, 妥当なものである. また, 次に示すベルの不等式はこの制約を受けない.

4 光子のエンタングルメント

1 光子の偏光は 2 自由度の量子系であり, (規格化された) 複素数の対 $(\psi_{\rm H}, \psi_{\rm V})$ が波動関数に相当する. この 2 次元複素ベクトルをブラケット記法を用いて

$$|\psi\rangle = \psi_{\rm H}|{\rm H}\rangle + \psi_{\rm V}|{\rm V}\rangle$$

のように表す. $|{\rm H}\rangle$, $|{\rm V}\rangle$ は水平偏光, 垂直偏光の状態を表すケットであり, 基底の役割を果たす[1]. 2 つのケット $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ の内積は, $\langle\phi|\psi\rangle = \phi^*_{\rm H}\psi_{\rm H} + \phi^*_{\rm V}\psi_{\rm V}$ で表す. (a^* は a の複素共役).

直線偏光状態は,

$$|\theta\rangle = \cos\theta|{\rm H}\rangle + \sin\theta|{\rm V}\rangle$$

と表すことができる. この状態の光子が水平方向にセットされた H 偏光板を通過する確率は, 内積の 2 乗

$$|\langle{\rm H}|\theta\rangle|^2 = \cos^2\theta$$

で与えられる. $\theta + \pi/2$ 方向の偏光を表すケットを

$$|\bar{\theta}\rangle = |\theta + \pi/2\rangle = -\sin\theta|{\rm H}\rangle + \cos\theta|{\rm V}\rangle$$

と書いておく.

ケットのテンソル積 $|\psi_{\rm a}\rangle \otimes |\psi_{\rm b}\rangle$ は光子 a, 光子 b の偏光状態がそれぞれ $|\psi_{\rm a}\rangle$, $|\psi_{\rm b}\rangle$ であることを表す. ケットを並べたものと考えて, $\otimes$ は省略されることが多い. このような 2 光子の偏光状態は 4 次元のベクトルで表され, その基底は例えば

$$(|{\rm H}\rangle|{\rm H}\rangle, |{\rm H}\rangle|{\rm V}\rangle, |{\rm V}\rangle|{\rm H}\rangle, |{\rm V}\rangle|{\rm V}\rangle)$$

である.

偏光状態がエンタングルした 2 つの光子 (光子対) は, 1 つの光子を非線形効果で 2 つに分裂させるパラメトリック下方変換という手法が用いられる. エンタングルした状態の例として, 次のようなものを考えよう.

$$|\varPhi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{\rm H}\rangle|{\rm H}\rangle + |{\rm V}\rangle|{\rm V}\rangle) \tag{1}$$

ここで, 光子 a を H 偏光板に通すと確率 1/2 で透過, あるいは阻止される. その結果, 前者の場合, 光子 b の状態は $|{\rm H}\rangle$, 後者の場合は, $|{\rm V}\rangle$ となる. 光子 a の状態を調べれば, 自動的に光子 b の状態が分かるのである. ただし, このような相関はあまり驚くには当たらない. 光子対を生成する際に, 両方が $|{\rm H}\rangle$, あるいは $|{\rm V}\rangle$ になるようにして, 1/2 の確率で送り出されているだけかも知れないからである.

[1] 通常のベクトル記法によって $\boldsymbol{\psi} = \psi_{\rm H}\boldsymbol{e}_{\rm H} + \psi_{\rm V}\boldsymbol{e}_{\rm V}$ と書いてもよい.

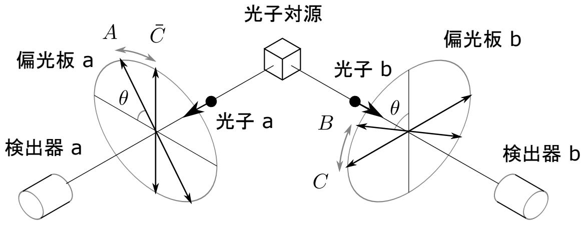

図 1: ベルの不等式の破れの検証実験

さて, 式 (1) の状態は基底を $|\mathrm{H}\rangle$, $|\mathrm{V}\rangle$ から, $|\theta\rangle$, $|\bar{\theta}\rangle$ に変換すると,

$$|\varPhi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\theta\rangle|\theta\rangle + |\bar{\theta}\rangle|\bar{\theta}\rangle)$$

のようになる. したがって, 同じ状態の光子対に対して, 光子 a を H 偏光板ではなく, θ 偏光板に通すと, やはり確率 1/2 で透過, あるいは阻止される. そして, 前者の場合, 光子 b の状態は $|\theta\rangle$, 後者の場合は, $|\bar{\theta}\rangle$ となる. 光子 a の任意の偏光測定の結果によって, 光子 b の対応する偏光状態を確実に言い当てられるという, 不可思議な状況になっているのである.

光子 a を H 偏光板を通すだけで, 光子 b に全く触れずに, それが H 偏光であることを言い当てられるのであれば, その性質はもともと光子 b に内在したものであって, 光子 a の測定前から変わらず保持されているはずだと考えることができる. この考えは「局所実在論」と呼ばれる.

H 測定を取り止めて, 代わりに θ 偏光板 $(0 \neq \theta \neq \pi/2)$ を通して光子 a が θ 偏光であることを確認したとする. この性質も予め光子 b が保持していたと考えると, 光子 b の偏光は H かつ θ であったということになる. これを一般化すると, 非可換な物理量が同時に確定値を持つ状態が存在するということになって矛盾に至る. Einstein はこれを根拠に量子論は完全な物理理論とはいえないと主張した [4]. この矛盾は著者の頭文字から, EPR のパラドックスと呼ばれている.

5 ベルの不等式

光子対の量子論的な非局所相関を再現するような隠れた変数モデルを作ることを考える. 図 1 のように, 光子 a については, 偏光板 a を θ 偏光 $(0 < \theta < \pi/2)$ か, V 偏光を透過させるようにセットして,

$$|A\rangle = |\theta\rangle, \quad \text{または} \quad |\bar{C}\rangle = |\mathrm{V}\rangle,$$

を, 光子 b については, 偏光板 b を $\bar{\theta}$ 偏光 $(\bar{\theta} = \pi/2 - \theta)$ か, H 偏光を透過させるようにセットして,

$$|B\rangle = |\bar{\theta}\rangle, \quad \text{または} \quad |C\rangle = |\mathrm{H}\rangle,$$

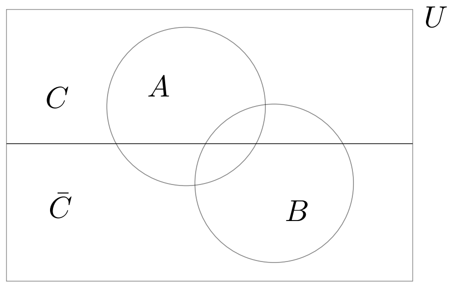

図 2: ベルの不等式における隠れた変数の集合

をそれぞれ調べるようにして, 両方の光子が共に偏光板を通過する確率を測定するものとする. 偏光板の置き方の組合せは 4 通りであるが, $p(C \cap \bar{C}) = 0$ なので, 3 通りに対する確率 $p(A \cap B)$, $p(A \cap C)$, $p(\bar{C} \cap B)$ が調べられる.

図 2 のように隠れた変数 λ が取りうる値の集合を U とし, その部分集合を A, B, C とする. $\lambda \in A$ なら, 光子 a が偏光板 A を通過, $\lambda \in B$ なら, 光子 b が偏光板 B を通過, $\lambda \in C$ なら, 光子 b が偏光板 C を通過, $\lambda \in \bar{C}$ なら, 光子 a が偏光板 $\bar{\mathrm{C}}$ を通過するものとする.

各部分集合に対する確率 p を調整することで, 光子対の振る舞いを再現すること試みる. 例えば, $p(A \cap B) = \frac{1}{2}\cos^2(\pi/2 - 2\theta)$ とすれば, 量子論と一致する確率で, 光子 a が偏光板 A を, 光子 b が偏光板 B を共に通過する. $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(A \cap B)$ であることに注意する.

さて, このような確率の割当てには制約がある. 集合の包含関係に関する式

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A \cap B) \cap (C \cup \bar{C}) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \\ &\subseteq (A \cap C) \cup (\bar{C} \cap B) \end{aligned}$$

が成り立つことは簡単に分かる. 部分集合に確率を対応させると, 次の不等式が得られる.

$$p(A \cap B) \leq p(A \cap C) + p(\bar{C} \cap B) \tag{2}$$

これがベルの不等式 [5] である[2].

さて, 量子論の結果に合わせるためには,

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= |\langle A|B\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \\ p(A \cap C) &= |\langle A|C\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2 \theta \\ p(\bar{C} \cap B) &= |\langle \bar{C}|B\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2 \theta \end{aligned}$$

[2] ベルの不等式には, 偏光板の設定に応じていくつかのバージョンがあるが, ここに示したのはその 1 つである. 特に, CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt) 不等式と呼ばれるものが一般的である. また, 確率 p の代わりに, 相関 $\mathcal{C} := 4p - 1$ がよく使われる.

を満たさなければならないが, $\pi/4 < \theta < \pi/2$ の場合には,

$$\sin^2 2\theta > 2\cos^2\theta$$

となって, ベルの不等式 (2) を破ってしまう. この場合, $p(A \cap C \cap \bar{B})$, $p(B \cap \bar{C} \cap \bar{A})$ を負にせざるを得なくなる. つまり, 量子論に合う確率の割当は不可能だということである.

ベルの不等式の破れの検証実験は, アスペら [6] によるものを始めとして, 念入りに行われてきたが, いずれの結果も量子論を支持するものである [7]. このように, 隠れた変数理論を始めとする代替理論が否定され, 量子論の正当性がゆるぎないものになってきた.

6　量子計算とエンタングルメント

1990 年代になると, エンタングルメントを積極的に活用した量子計算や量子暗号といった量子情報処理の考え方に注目が集まるようになり, さまざまな物理系を利用してエンタングルメントを生成, 制御するデバイスが実現されるようになってきた. 最も基本的な量子ゲートである制御 NOT (CNOT) の動作は

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle \mapsto \alpha|0\rangle|0\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle$$

であり, 非エンタングル状態をエンタングル状態に変化させるものである. 思考実験 (Gedankenexperiment) の対象であったエンタングルメントは今やコンピュータの素子というリアルなものに変容を遂げたわけである.

ところで, 多くの系がエンタングルした状態

$$\alpha|0\rangle|0\rangle\ldots|0\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle\ldots|1\rangle$$

は大変脆弱である. 各系における位相のずれが蓄積して相対位相が大きく変化して重ね合わせの符号が変わりうる. また, 1 つの系の測定が意図しないままに行われただけで, 全体が $|0\rangle|0\rangle\ldots|0\rangle$ または $|1\rangle|1\rangle\ldots|1\rangle$ になってしまう. このような脆弱性が量子計算機を実現する上での障害になっている.

7　自然の巧みさ

量子論における非局所相関はセンセーショナルなものに見えるが, 意外に行儀がよく, 我々の日常を撹乱しないようにできている.

H 光子と V 光子をそれぞれ 1/2 の確率で発生する光源を考えよう. θ 偏光板を通過する確率は, それぞれ $\cos^2\theta, \sin^2\theta$ なので, 平均をとれば 1/2 になる. θ 光子と $\bar{\theta}$ 光子を確率 1/2 で混ぜたものと結果は変わらず, 特に H, V を選んだ効果は見えない. 補色の絵の具を混ぜてつくった灰色には元の色の個性が見えないのと同じである. 太陽など日常的な光源からの光は, ほとんどが無偏光である. 光子対光源も片方の光子だけを見ている限りは無偏光状態である.

光子対の実験の話を聞いて, 光子 a に対する測定によって, 光子 b の状態を瞬間的かつ自由に変化させられるという印象を持つ人も多い. しかし, 冷静に見ると, それほど大胆なことができるわけではない. 確かに, 光子 a に対してどの偏光を測定するかは自由に決めることができるが, その結果まではコントロールすることは出来ず, 透過・不透過は成り行き次第である. その結果を伝えなければ, 光子 b の状態は相変わらず, 測定しなかった場合と同様に,「無偏光」である. さらに, コントロールしたり, 情報を得ていると思っていても, b 光子の方が先行して測定されている可能性さえある. 何か積極的なことを行うためには, 光子 a に対する測定の種類と結果を遠隔地に伝える必要がある. 相対論的因果律を破っているという議論もよくなされるが, 古典的情報を伝達しないと意味のあることは出来ないので, 心配は無用である.

隠れた変数理論が否定され, エンタングルメントが当然のこととして, 受け入れられるようになったわけであるが, 観測によりどのようなメカニズムで状態が選択されるのか, という問題 (いわゆる波束の収縮) が大きい宿題として残ってしまっている. 巧妙な自然の企みを知るためには, しばらく時間がかかりそうである.

参考文献

[1] 佐藤文隆, 『アインシュタインの反乱と量子コンピュータ』(京都大学学術出版会, 2009).

[2] J.S. Bell, "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics" Rev. Mod Phys. **38**, 447 (1966).

[3] S. Kochen and E.P. Specker, "The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics" J. Math. Mech. **17**, 59 (1967).

[4] A. Einstein,B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[5] J.S. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox" Physics **1**, 195 (1964).

[6] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem" Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).

[7] 谷村省吾,「アインシュタインの夢ついえる」『日経サイエンス』 2019 年 2 月号, p. 64 (2019)

[きたの まさお]

北野正雄●きたの・まさお
1952 年，京都生まれ．京都大学名誉教授．専門は，量子光学，電磁気学基礎．著書に『量子力学の基礎』(共立出版)，『新版マクスウェル方程式』(サイエンス社)，『新 SI 単位と電磁気学』(共著，岩波書店)，などがある．

普段から SF には無縁で，肩身の狭い思いで，特集号の原稿を書きました．エンタングルメントや隠れた変数について久しぶりに考える機会になりましたが，問題解決に要した時間の長さ，理論と実験の見事な連携，自然の巧みさ，などに改めて感銘を受けるとともに，アインシュタインの有名な ''Subtle is the Lord...'' ということばが浮かびました．