双対と計量

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2011 年 4 月 22 日

双対と計量の関係について復習したい．両者は似た者同士であり, 混同されがちである．特に計量が定義されている場合, 双対構造は計量の背後に隠れてしまう傾向にある．特に, 線形空間の入門編ではユークリッド空間がモデルに選ばれるので, 計量のみで話がついてしまう．しかし, 双対構造は計量よりも基本的な性質であり, その存在を完全に無視することはできない.

1 双対空間

一般的な N 次元線形空間 V を考える．係数は実数であるとする．計量, つまりベクトルの長さやベクトル間の角度は定義されていないとする．（計量があっても, 当面それがないふりをする.）

V から $\mathbb{R}$ への線形関数 $\phi : \boldsymbol{x} \mapsto \phi(\boldsymbol{x})$ 全体がなす集合 V^* を考える．線形関数は任意の $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x} \in V$ に対して $\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2)$, $\phi(c\boldsymbol{x}) = c\phi(\boldsymbol{x})$ をみたすものである．さて, $c \in \mathbb{R}$, $\phi_1, \phi_2, \phi \in V^*$ に対して, 和 $\phi_1 + \phi_2$, スカラー倍 $c\phi$ はいずれも V^* の要素であるので, V^* は線形空間となる．ただし, 和, スカラー倍は $(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}) = \phi_1(\boldsymbol{x}) + \phi_1(\boldsymbol{x})$, $(c\phi)(\boldsymbol{x}) = c\phi(\boldsymbol{x})$ によって定義される．V^* は V の双対空間とよばれる．双対空間の要素を双対ベクトルまたはコベクトルとよぶ．双対は計量より原初的な概念であり, 任意の線形空間に付随するものである.

V に基底 $\{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_N\}$ を導入する．計量がないので, 正規性や直交性を要求することはできない．ただ, 互いに線形独立であるという性質だけが重要である.

$\phi \in V^*$ に対して, $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{t}_i \in V$ を作用させると, 線形性から

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_i\boldsymbol{t}_i) = x_i\phi(\boldsymbol{t}_i) \tag{1}$$

となる[1]．$a_i = \phi(\boldsymbol{t}_i)$ とおき, さらに,

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{n}_i \in V^* \tag{2}$$

のようにベクトル的に表現すると,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = a_ix_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \tag{3}$$

のように表すことができる．ここで, $\boldsymbol{n}_i \in V^*$ は

$$\phi_i(\boldsymbol{t}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N) \tag{4}$$

を満たす ϕ_i のことである.

つまり, V^* には自動的に次のような性質を満たす基底 $\{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_N\}$ が導入される.

$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{t}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N) \tag{5}$$

[1] 重複する添字について和をとることにする.

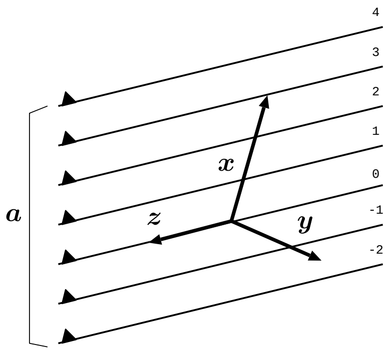

図 1: 双対ベクトル (コベクトル) の図的表現 (2 次元の場合). 双対ベクトル $\boldsymbol{a}$ は対応する線形関数 $\phi \in V^*$ の等高線として表現することができる. ベクトルが横切る等高線の数が関数の値となる. 2 次元の矢印で与えられる $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対し, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 3$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} = -1.5$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{z} = 0$ である. 等高線に付随する三角形は関数 ϕ の値が増える方向を示している. 課題: 基底 $\{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2\}$ の双対基底 $\{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\}$ を描いてみよ.

これを自然基底, あるいは双対基底という. V^* の次元は V の次元に等しい.

V^* における双対基底は V の基底に呼応して決まるものであるが, 基底をなすベクトルと, 双対基底をなすコベクトルの間に個別的な対応 ($\boldsymbol{t}_i \leftrightarrow \boldsymbol{n}_i$) が存在するわけではない. 例えば, $\boldsymbol{n}_1$ は $\boldsymbol{t}_1$ ではなく, $\boldsymbol{t}_2$ から $\boldsymbol{t}_N$ の選びかたに影響を受ける.

V の基底を $\boldsymbol{t}'_j = \boldsymbol{t}_l L_{lj}$ のように取り替えたとき, 対応する双対基底が $\boldsymbol{n}'_i = M_{ik}\boldsymbol{n}_k$ のように変換したとすると,

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{n}'_i \cdot \boldsymbol{t}'_j = M_{ik}L_{lj}\boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{t}_l = M_{ik}L_{lj}\delta_{kl} = M_{ik}L_{kj} \tag{6}$$

となることから, 逆行列による変換をうけることが分かる.

ベクトルを $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{t}_i = x'_j\boldsymbol{t}'_j \quad (= x'_j\boldsymbol{t}_l L_{lj})$ のように両方の基底で表す. $x_i = L_{il}x'_l$ である. 双対基底を利用して $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{t}_i$ に対してコベクトルを $\boldsymbol{a} = x_i\boldsymbol{n}_i$ のように対応づけてみる. すると,

$$\boldsymbol{a} = x_i\boldsymbol{n}_i = L_{il}x'_l\boldsymbol{n}_i = L_{il}x'_l L_{ik}\boldsymbol{n}'_k \neq x'_l\boldsymbol{n}'_l \tag{7}$$

となる. この対応づけは, 基底に依存するものであり, 普遍性がないことが分かる. この時点では V の各ベクトルと V^* のコベクトルの間には対応関係がないことになる.

2 計量

線形空間 V に計量 (内積) が定義されているとする. つまり, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ が対称かつ双線形的に対応づけられているとする[2]. すなわち, $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$, $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つ. さらに, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ について $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ のとき, 正値計量とよばれる. ここで $g_{ij} = (\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_j)$ は計量で基底を評価するものである. (後に, 計量テンソルとよばれるテンソルの成分表示であることが分かる.) $g_{ji} = g_{ij}$ である. さらに,

$$g_{ij} = (\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_j) = (\boldsymbol{t}'_k M_{ki}, \boldsymbol{t}'_l M_{lj}) = (\boldsymbol{t}'_k, \boldsymbol{t}'_l)M_{ki}M_{lj} = g'_{kl}M_{ki}M_{lj} \tag{8}$$

が成り立つ.

双対と内積を関係づけることを考える. まず, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ を 1 つ選ぶ. 任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} \tag{9}$$

[2] $\boldsymbol{x}$ の長さは $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ である. 計量は基本的には長さのことであるが, 線形性から $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つので, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ という形が必要とされるのである. つまり, 長さより内積の方がむしろ基本的な要素と考えられる.

が成り立つようなコベクトル $\boldsymbol{a} \in V^*$ を選ぶ[3]. これを $\boldsymbol{x}$ の共役とよび, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^\dagger$ と表す.

基底と双対基底によって, 式の両辺を書き直すと

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (x_i \boldsymbol{t}_i, y_j \boldsymbol{t}_j) = x_i y_j (\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_j) = g_{ij} x_i y_j, \\
(a_i \boldsymbol{n}_i) \cdot (y_j \boldsymbol{t}_j) &= a_i y_j \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{t}_j = a_i y_j \delta_{ij} = a_j y_j
\end{aligned} \tag{10}
$$

これらを比較することで,

$$
a_j = g_{ij} x_i \tag{11}
$$

であることが分かる. すなわち, 共役関係は基底を用いて

$$
\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{t}_i \quad \mapsto \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^\dagger = x_i g_{ij} \boldsymbol{n}_j \tag{12}
$$

と表せる. 成分については $a_j = x_i g_{ij}$ である.

この関係が基底の選びかたに依らないことを示そう.

$$
\boldsymbol{a} = x_i g_{ij} \boldsymbol{n}_j = L_{im} x'_m g'_{kl} M_{ki} M_{lj} L_{jn} \boldsymbol{n}'_n = \delta_{km} \delta_{ln} x'_m g'_{kl} \boldsymbol{n}'_n = x'_k g'_{kl} \boldsymbol{n}'_l \tag{13}
$$

このように, V の計量を通して, ベクトルとコベクトルの対応, すなわち共役関係を考えることができるようになる.

V の基底 $\{\boldsymbol{t}_i\}$ に対して, $\{\boldsymbol{t}_i^\dagger\}$ は V^* の基底になる. $\boldsymbol{t}_i^\dagger = g_{ij} \boldsymbol{n}_j$ である. 共役関係は $\boldsymbol{x}^\dagger = (x_i \boldsymbol{t}_i)^\dagger = x_i \boldsymbol{t}_i^\dagger = x_i g_{ij} \boldsymbol{n}_j$ と表せる. 一般的にいって, $\{\boldsymbol{t}_i^\dagger\}$ よりも $\{\boldsymbol{n}_i\}$ の方が使い易い.

正規直交基底をとると, $g_{ij} = \delta_{ij}$ となり, 共役関係は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^\dagger = x_i \boldsymbol{n}_i$ と簡単なものになる. とくに, $\boldsymbol{t}_i^\dagger = \boldsymbol{n}_i$ が成り立つ. このように計量がある場合, 正規直交基底を用いると, 共役関係は自明なものとなる. そして, 双対空間ともとの空間の区別があいまいになり, 双対構造は無視されがちになる.

しかし, 基底を計量に整合するようにとることができない場合もある. そのような状況では双対構造と計量を区別することが重要となる. たとえば, 相対論の場合, 3 次元空間の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と時間の基底 $\boldsymbol{e}_0$ を合わせたものと, とりあえずの（計量を考慮しない）基底としている. それに伴って, 自動的に双対基底 $\{\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ が導入される. 計量は $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ である.

一般的に行われている, 添字の上げ下げは計量を通して, 共役量への変換を行っていることに相当する[4]. すなわち, 式 (12) は

$$
\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i \quad \mapsto \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^\dagger = x^i g_{ij} \boldsymbol{e}^j = x_j \boldsymbol{e}^j \tag{14}
$$

のように書かれる[5].

3 双対空間を利用した計量の導入

前節では, 内積を V が最初から持っている性質であると考えていたが, ここでは双対空間を利用して, 計量が定義されていない線形空間に計量を操作論的に導入してみよう.

そもそも双対空間には, もとの空間のベクトルを測る機能が備わっている. コベクトル $\boldsymbol{a}$ を準備しておけば, 未知の $\boldsymbol{x}$ に対してスカラー量 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$ を調べることで, $\boldsymbol{x}$ に関する量的な情報が得られる. N 個の独立の $\boldsymbol{a}_i$ を準備しておけば, スカラー量の組 $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}$ を決定することができる.

コベクトルは校正されていない測定装置（例えば, 目盛のない温度計）のようなものである. ベクトルの長さや角度を測定できるが, その絶対的な値を決めることはできない. 1 次元の場合を例に考えよう. 任意の $a \in V^*$ は $x \in V$ の長さを $a \cdot x$ によって見積もるのに利用することができる. ただし, a の選び方によって値が変わるので, 普遍的な尺度とはいえない. そこで, 規約として $a_0 \in V^*$ と $0 < h \in \mathbb{R}$ をそれぞ

[3] 量子論では, $(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle$ が対応する式である.

[4] 上添字, 下添字の導入は拙速に行うと, 意味を考えない形式的計算に終始することになる.

[5] 量子論では共役関係は $|\psi\rangle = c_i |e_i\rangle \mapsto \langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = c_i^* \langle e_i|$ $(|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle\psi| \in \mathcal{H}^*)$ であり, 上下ではなく左右の反転で表現している.

れ 1 つ選定し, x の長さの 2 乗を $|x|^2 := h(a_0 \cdot x)^2$ と定義する. 測定装置とその目盛を指定したことに対応する. これにより, V に長さ (計量) が導入されたことになる.

これを参考に一般の次元の場合に対して, 計量を双対空間を経由して導入することを考えよう. まず, N 個の独立なコベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N\}$ を指定する. さらに対称な係数 h_{ij} を選定する. そして, $2N$ 個の測定データ $X_i = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x}$, $Y_i = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{y}$ から

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := h_{ij} X_i Y_i = h_{ij}(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{y}) = h_{ij}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j : \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \mathsf{h} : \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = (\mathsf{h} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} \tag{15}$$

によって V の内積を定義する. このように測定装置の組と測定後のデータ処理を定めることで, V に計量が導入される. $\mathsf{h} = h_{ij}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j \in V^* \otimes V^*$ は計量テンソルに相当する. また, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, その共役元 $\boldsymbol{x}^\dagger = \mathsf{h} \cdot \boldsymbol{x} \in V^*$ が一意に決まる.

4 計量テンソルの標準化

計量テンソルの標準化 (対角化) を考える. V の基底の変換に対して計量テンソルを表す行列は式 (8) のように変換される. すなわち, $g' = L^{\mathrm{T}} g L$ のように変換される. これに対して, 通常の行列の対角化においては, 基底の変換に伴って行列が $A' = L^{-1} A L$ のように変換されることを利用する. したがって, 通常の行列の対角化の手法をそのまま援用することはできない.

まず, 計量テンソルを双線形対称関数を用いて $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ と表す. 成分は,

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(x_i \boldsymbol{t}_i, y_j \boldsymbol{t}_j) = g(\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_j) x_i y_j = g_{ij} x_i y_j \tag{16}$$

すなわち, $g_{ij} = g(\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_j)$ である. 簡単のために, (g_{ij}) のランクは N であるとする.

ここで, $0 \neq \boldsymbol{z}_1 \in V$ を適当にとる. $\boldsymbol{z}_1$ が張る 1 次元部分空間を Z_1 と表す. そして, $g(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{x}) = 0$ をみたす $\boldsymbol{x} \in V$ の集合 $W \subset V$ を考える. W が線形空間となることは簡単に分かるので, W は V の部分空間である.

任意の $\boldsymbol{x} \in V$ について

$$\boldsymbol{x}_\perp = \boldsymbol{x} - \frac{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_1)}{g(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_1)} \boldsymbol{z}_1 \tag{17}$$

は, $g(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{x}_\perp) = 0$ をみたすので, $\boldsymbol{x}_\perp \in W$ である. これより, $V = Z_1 \oplus W$ (直和) であることが分かる. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\parallel + \boldsymbol{x}_\perp = \frac{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_1)}{g(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_1)} \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{x}_\perp \tag{18}$$

と一意的に表せる. 同様に, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_\parallel + \boldsymbol{y}_\perp$ とすると,

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= g(\boldsymbol{x}_\parallel, \boldsymbol{y}_\parallel) + g(\boldsymbol{x}_\parallel, \boldsymbol{y}_\perp) + g(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\parallel) + g(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp) \\ &= g(\boldsymbol{x}_\parallel, \boldsymbol{y}_\parallel) + g(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp) \\ &= \frac{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_1) g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1)}{g(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_1)} + g(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp) \end{aligned} \tag{19}$$

$g(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\parallel) = g(\boldsymbol{y}_\parallel, \boldsymbol{x}_\perp) = 0$ を利用した.

$g(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp)$ の部分は $\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp \in W$ なので, W 上の対称双線形関数であると考えることができる. したがって, 同じ議論を繰り返すことで,

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_i) g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_i)}{g(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_i)} \tag{20}$$

$\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_N\}$ はその構成法から計量 g に関して直交基底になっている. すなわち, $i \neq j$ に対して $g(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_j) = 0$ である. この基底を用いて $\boldsymbol{x} = x'_k \boldsymbol{z}_k$, $\boldsymbol{y} = y'_l \boldsymbol{z}_l$ と展開すると,

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i g(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_i) = \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i g'_{ii} \tag{21}$$

のように計量テンソルを対角的に表すことができる. ただし, $g'_{ij} = g(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_i)\delta_{ij}$.

さらに, $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{z}_i/\sqrt{|g(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_i)|}$ とおくと, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_N\}$ は正規直交基底になる. この基底を用いて $\boldsymbol{x} = x''_k \boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{y} = y''_l \boldsymbol{e}_l$ と展開すると,

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{N} x''_i y''_i g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\pm) x''_i y''_i \tag{22}$$

となり, 計量テンソルを正規形で表すことができる. ただし, $g''_{ij} = g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \pm\delta_{ij}$. 複号は $g(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_i)$ の正負に対応する. 正値計量の場合はすべて正の符号となる.

5 まとめ

- 線形空間 V には, その双対空間 V^* が付随する. $(V^*)^* = V$ である.
- V の任意の基底 $\{\boldsymbol{t}_i\}$ に対して V^* に自然基底 $\{\boldsymbol{n}_i\}$ が誘導される; $\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{t}_j = \delta_{ij}$.
- V と V^* の間には要素間の普遍的な対応関係は存在しない.
- V に計量 (内積) が導入されると, V と V^* の間には要素関の 1 対 1 の対応関係, すなわち, 共役関係 (†) が生じる; $\boldsymbol{x}^\dagger \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. $(\boldsymbol{x}^\dagger)^\dagger = \boldsymbol{x}$ である.
- 正値計量の場合, V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ に対して, $\{\boldsymbol{e}_i^\dagger\}$ は V^* の自然基底と一致する. V と V^* は基底も含めて同一視できる.
- 非正値計量の場合や V に非正規あるいは非直交基底を導入する場合は, V^* の自然基底 (あるいは V^* そのもの) を残す必要がある. $\boldsymbol{t}_i^\dagger = g_{ij}\boldsymbol{n}_j$ あるいは上下添字を用いて $\boldsymbol{e}_i^\dagger = g_{ij}\boldsymbol{e}^j$ である[6]. 共役関係の表現に計量テンソルが陽に現れる.

参考文献

[1] 永田雅宜: 理系のための線形代数の基礎 (紀伊國屋書店, 1986) 第 4 章.

[2] S. MacLane and G. Birkhoff: Algebra, 3rd ed. (Chelsea, 1988).

[6] うっかり, $\boldsymbol{e}_i = g_{ij}\boldsymbol{e}^j$ と書いてしまうが, 間違いである. $\boldsymbol{e}_i \in V$, $\boldsymbol{e}^j \in V^*$ だから.