

# ビオ・サバールの式と変位電流 — ヘルムホルツ分解の視点から

2021 年 6 月 20 日

北野正雄

応用科学研究所 / 京都大学名誉教授

## 1 はじめに

長年続いている変位電流をめぐる論争は、「変位電流による磁場はゼロである」という誤解を招く主張<sup>1, 2)</sup>に惑わされて、さまざまな方向に議論が拡散し、混乱状態が続いている<sup>3)</sup>。

文献<sup>4)</sup>では、(準定常条件下で) 磁場を「電流」と「変位電流」に起因するものに分離することは、原理的に不可能であることを示し、「変位電流が磁場をつくるか/つくらないか」という設問自体が意味をなさない、不適切な (ill-posed) 問題であることを明らかにした。磁場との関連において、電流と変位電流は一体のものであり、それらの一部  $\mathbf{J}_{\text{part}}$  を切り出して、対応する磁場  $\mathbf{H}_{\text{part}}$  が定められるのは、 $\text{div } \mathbf{J}_{\text{part}} = 0$  の場合に限られる。そして、変位電流はこの条件を満たしていない。

にもかかわらず「切り出された部分電流による磁場」なるものを求めようと、ビオ・サバールの式がしばしば援用される。しかし、ビオ・サバールの式の電流要素は両端に変位電流を伴っており、その積分結果においても、与えられた電流 (あるいは変位電流) の湧き出しを打ち消すための、変位電流の効果を〈自動的に〉織り込んだ磁場を与えている<sup>4, 5, 6)</sup>。これは、意図された部分電流による磁場とはいえない。

本稿では、やや異なった視点から、ビオ・サバールの式が変位電流の効果を自動的に内包する仕組みを詳しく調べる。そのために、電流密度をはじめとする、ベクトル場を渦なし場 (縦場) と湧き出しなし場 (横場) に分ける「ヘルムホルツ分解」を導入し、幾何学的な手法で理解を深める。マクスウェル・アンペールの式は、磁場と〈電流分布の横成分〉の間の一

対一対応を与えるものであり、変位電流は電流分布の縦成分の打ち消しの役割を演じていることを示す。一方、ビオ・サバールの式は、与えられた電流分布の横成分への射影を求め、それに対する磁場を算出する 2 段階の機能を有していることを明らかにする。

次に、変位電流 ( $\partial_t \mathbf{D} \neq 0$ ) に加えて、電磁誘導が存在する ( $\partial_t \mathbf{B} \neq 0$ ) 場合について議論する。電磁誘導電場に起因する〈変位電流の横成分〉が出現し、電流の縦成分の打ち消しという受動的な役割ではなく、独立した項として、電流から遠く離れた場所においても磁場を支える役割を果たしうることを示す。この変位電流の横成分によって、電磁波伝搬がはじめて可能になることが分かる。

## 2 ビオ・サバールの磁場が与える電流

電流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  に対する、磁場 (の強さ)  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  を与える、ビオ・サバールの式は、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{v}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1)$$

と書ける。 $d\mathbf{v}'$  は位置  $\mathbf{r}'$  における体積要素である。簡単のために、クーロン型のベクトル場を

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \quad \left( = -\nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \right) \quad (2)$$

と表した<sup>7)</sup>。ビオ・サバールの磁場 (1) の渦は

$$\text{curl } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{v}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3)$$

であり<sup>8)</sup>、与えた電流密度  $\mathbf{J}$  に加えて、余分な項が現れている。この項は  $\text{div } \mathbf{J} = 0$  の場合は消える

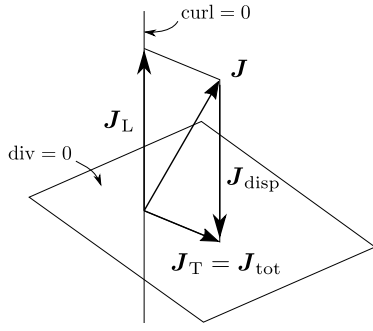


図 1: 電流密度  $\mathbf{J}$  のヘルムホルツ分解. 関数空間における直交部分空間への射影を概念的に表している.

ので, 変位電流密度に対応すると推測される. 電荷の保存則  $\text{div } \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = 0$  とガウスの法則  $\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$  を考慮すると, 式 (3) 右辺第 2 項 (負号をふくむ) は,

$$\int d\mathbf{v}' \partial_t \rho(\mathbf{r}', t) \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

となり<sup>9)</sup>, 確かに, 変位電流密度になっている. 電流の湧き出しを補償するように, クーロン形の変位電流を充てていることが分かる.

### 3 ベクトル場のヘルムホルツ分解

変位電流の役割をさらに詳しく見ておこう. 一般の 3 次元ベクトル場は, 「渦なし場」と「湧き出しなし場」の和で表されることが知られている. ヘルムホルツ分解と呼ばれる<sup>10)</sup>. 例えば, 電流密度場は,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}_L(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_T(\mathbf{r}), \\ \forall \mathbf{r}: \quad \text{curl } \mathbf{J}_L(\mathbf{r}) &= 0, \quad \text{div } \mathbf{J}_T(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

と分解される. 場のフーリエ変換  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k})$  における幾何学的関係から, 渦なし場, 湧き出しなし場はそれぞれ, 縦場, 横場ともよばれ, 添字  $L, T$  で表す<sup>11)</sup>.

ここで, 式 (3) を次のように書き直す.

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \hat{L}\mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\hat{1} - \hat{L})\mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

$\hat{L}$  はベクトル場  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  に新たなベクトル場

$$(\hat{L}\mathbf{J})(\mathbf{r}) := \int d\mathbf{v}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7)$$

に対応させる線形演算子,  $\hat{1}$  は恒等演算子である. 式 (6) と  $\text{div curl} \equiv 0$  から,  $(\hat{1} - \hat{L})\mathbf{J} =: \hat{T}\mathbf{J}$  は横場である.  $\hat{T}\mathbf{J}$  を式 (7) に代入すると,  $\hat{L}(\hat{T}\mathbf{J}) = 0$ . これらから,  $\hat{T}$  と  $\hat{L}$  は射影演算子の性質,  $\hat{T}^2 = \hat{T}$ ,  $\hat{L}^2 = \hat{L}$ ,  $\hat{T}\hat{L} = \hat{L}\hat{T} = 0$  を満たすことが分かる (図 1).

式 (6) から, ビオ・サバールの式は電流密度の〈横成分〉  $\mathbf{J}_T = \mathbf{J} - \mathbf{J}_L$  による磁場を与えていることがわかる. これは, 全電流密度

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} := \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{disp}} \quad (8)$$

に対応している.  $\mathbf{J}_{\text{disp}} = -\mathbf{J}_L (= \partial_t \mathbf{D})$  は変位電流密度である. ここで, 差と和の違いがずいぶん異なった印象を与えている. 図 1 のように, 電流密度  $\mathbf{J}$  に変位電流密度  $\mathbf{J}_{\text{disp}}$  を〈加える〉ことは, 縦成分  $\mathbf{J}_L$  の〈打ち消し〉を意味するのである. 後者の文脈では, マクスウェル・アンペールの式を

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J} - (-\partial_t \mathbf{D}) \quad (9)$$

と書いた方が理解しやすい.

表 1 に電流分布のヘルムホルツ分解の例を図示した. 原点の微小電流要素  $\mathbf{p} := \mathbf{J} \Delta \mathbf{v}$  については, 式で与えた<sup>12)</sup>. 電流  $I$  の線要素  $\Delta \mathbf{l}$  では  $I \Delta \mathbf{l}$  を, 速度  $\mathbf{v}$  で運動する点電荷  $q$  では  $q\mathbf{v}$  を, それぞれ  $\mathbf{p}$  と置けばよい.

球対称電流は変位電流の基本的形態なので, よく議論の対象になる<sup>1, 2)</sup>. 表 1 に示す, 多数の半直線電流を等方的に 1 点に集約することで, 球対称電流が得られる. 対応する操作を端点に変位電流を加えて得られる横成分について行くと, 明らかに全電流はゼロになり, その〈結果として〉磁場もゼロになる. これは, 横場である全電流と磁場が等方的であり得ないことと符合している<sup>13)</sup>. コンデンサについては, 極板上の電流も考慮する必要がある<sup>14)</sup>.

|        | $\mathbf{J}$                      | $=$ | $\mathbf{J}_T$                                             | $+$ | $\mathbf{J}_L$                                     |
|--------|-----------------------------------|-----|------------------------------------------------------------|-----|----------------------------------------------------|
|        | $\mathbf{J}$                      | $=$ | $\mathbf{J}_{\text{tot}}$                                  | $+$ | $(-\mathbf{J}_{\text{disp}})$                      |
| 微小電流要素 | $\mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r})$ |     | $(\mathbf{p} \times \nabla) \times \mathbf{G}(\mathbf{r})$ |     | $(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{G}(\mathbf{r})$ |
| 半直線電流  |                                   |     |                                                            |     |                                                    |
| 球対称電流  |                                   |     | 0                                                          |     |                                                    |
| コンデンサ  |                                   |     |                                                            |     |                                                    |

表 1: 電流のヘルムホルツ分解の例.

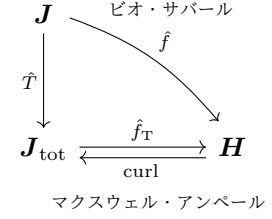


図 2: ビオ・サバルの式の 2 つの役割

#### 4 ビオ・サバルの式のトリック

ビオ・サバルの式は、実験結果やクーロンの法則との類似性などを参考に、経験則として確立されたものであるが、本来マクスウェル方程式の解として求められるべきものである。ビオ・サバルの式において、見かけ上、変位電流密度が現れない理由を、その導出過程に遡って調べておこう。

式 (9) の渦  $\text{curl curl } \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{J}_{\text{tot}}$  と  $\text{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = 0$  ( $\mu_0$ : 真空の透磁率) を組み合わせると、

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\text{curl } \mathbf{J}_{\text{tot}} \quad (10)$$

が得られる。  $\text{curl curl} = \text{grad div} - \nabla^2$  を用いた。この (ベクトル) ポアソン方程式の標準的な解から、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \mathbf{J}_{\text{tot}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (11)$$

が得られる<sup>15)</sup>。通常のビオ・サバルの式 (1) の  $\mathbf{J}$  を  $\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}$  で置き換えたものである。これを

$$\mathbf{H} = \hat{f}_T \mathbf{J}_{\text{tot}} \quad (12)$$

のように、〈全電流に対する〉演算子で表すことにする。マクスウェル・アンペールの式  $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{tot}}$  の逆であり、 $\hat{f}_T = \text{curl}^{-1}$  と書ける。磁場と全電流の間には〈一対一対応〉が成り立っている (図 2)。

さて、方程式 (10) の右辺には  $\text{curl}$  があり、任意の縦場  $\mathbf{J}'_L$  を加えても、 $\text{curl}(\mathbf{J}_{\text{tot}} + \mathbf{J}'_L) = \text{curl } \mathbf{J}_{\text{tot}}$  だから、磁場は影響されない。そこで、 $\mathbf{J}'_L = -\partial_t \mathbf{D}$  と選べば、式 (11) の  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  は  $\mathbf{J}$  で置き換えることができる。 $\mathbf{D}$  を別途計算せずとも、外的に予め把握可能な  $\mathbf{J}$  だけから磁場を求められるので好都合である。これがまさに、通常のビオ・サバルの式 (1) であり、

$$\mathbf{H} = \hat{f} \mathbf{J}, \quad \hat{f} := \hat{f}_T \hat{T} \quad (13)$$

と表せる。演算子  $\hat{f}$  は〈任意の〉電流分布に対して定義されるが、可逆ではない (図 2)。つまり、磁場  $\mathbf{H}$  から電流  $\mathbf{J}$  を一意に決めることはできないのである。

このようにビオ・サバルの式には、(i) 所与の電流分布  $\mathbf{J}$  から横成分 (全電流)  $\hat{T} \mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}$  を取り出し、(ii) それに対応する磁場  $\mathbf{H}$  を求める、という 2 段階の機能が内包されている。

#### 5 電磁波と変位電流

これまでは、定常電流条件が破れた場合 ( $\text{div } \mathbf{J} \neq 0$ , すなわち  $\partial_t \mathbf{D} \neq 0$ ) を扱ってきた。さらに条件を緩めて、磁場も時間変動する場合 ( $\partial_t \mathbf{B} \neq 0$ ) を考えよう。

マクスウェル方程式において場の縦成分、横成分の分別を行う。磁束密度は、湧き出しがないので、

$\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_T$  であり、電磁誘導の式は、

$$\text{curl } \mathbf{E}_T = -\partial_t \mathbf{B}_T \quad (14)$$

となる。電束密度については、 $\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{D}_L = \rho$  であることから、縦成分  $\mathbf{D}_L$  は電荷密度に、横成分  $\mathbf{D}_T = \epsilon_0 \mathbf{E}_T$  は電磁誘導の式に関係付けられている。一方、マクスウェル・アンペールの式は

$$\text{curl } \mathbf{H}_T = \mathbf{J}_T + \partial_t \mathbf{D}_T + \cancel{\mathbf{J}_L} + \cancel{\partial_t \mathbf{D}_L} \quad (15)$$

となるが、左辺は横場 (湧き出しなし) なので、定常磁場の場合と同じく  $\mathbf{J}_L + \partial_t \mathbf{D}_L = 0$  とならなければならない。そして、電流密度の横成分  $\mathbf{J}_T$  の他に、電磁誘導由来の変位電流密度の横成分  $\partial_t \mathbf{D}_T$  が残ることになる。この〈横〉変位電流による式 (14), (15) の結合によって、電場と磁場の横成分の絡み合いが生じ、新たに電磁波モードが可能となるのである。

横場  $\mathbf{J}_T$ ,  $\partial_t \mathbf{D}_T$  は、いずれも湧き出しがないので、縦成分の場合とは異なって、磁場への寄与において、分離して、独立のものとして扱うことができる。

特に、 $\mathbf{J}_T = 0$  とすると、自由場の解が得られる。横変位電流  $\partial_t \mathbf{D}_T$  は、実電流に束縛されるものではないため、電磁波は源から遠く離れたところまで伝搬可能となる<sup>16)</sup>。(変位電流の縦成分の源からの距離依存性が高々  $1/R^2$  であるのに対して、電磁波、つまり横成分のそれは  $1/R$  である。)

## 6 まとめ

変位電流の存在は巧妙 (subtle) で捉えがたく、マクスウェルの深い洞察を通して、漸くにして発掘されたものである。彼は電流と変位電流の一体性を重要視し、それらの和である全電流  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  を用いて電磁場の基本方程式を書き下した。これまで見てきたように、一口に、変位電流といっても、縦成分と横成分では役割が異なっている。前者が、当初の導入のきっかけにはなったものの、電流の縦成分の打ち消しという裏方に留まるのに対し、後者は、電磁波伝搬の立役者として、一躍脚光を浴びる存在となったのである。

ところで、後進たちは、電流と変位電流の磁場への寄与の分離を試みるうち、ビオ・サバルの式の罠に陥ってしまった。特に「変位電流は磁場をつくらない」という言明は、折角発見された変位電流の過小評価や無視に繋がるだけでなく、電磁波における本質的役割さえ見失わせるおそれがある。

本稿を通して変位電流の理解が深まり、教程における無用の混乱が収束に向かうことを期待したい。

有益な議論をいただいた、中田陽介、玉手修平、浦出芳郎、和田純夫、斎藤吉彦、霜田光一の各氏に感謝する。

## 参考文献と注釈

- 1) 例えば、E.M. パーセル (著)、飯田修一 (監訳): パーケレー物理学コース 2, 電磁気 (下) (丸善, 1971) 7.12 節.
- 2) 最近のものでは、太田浩一: 電磁気学の基礎 I (東京大学出版会, 2012) 7.7.1 節, 11.5.1 節.
- 3) 物理教育の雑誌 Am. J. Phys., Eur. J. Phys. などに多くの論文が投稿されてきた。「物理教育」の 60 巻 (2012) においても特集が組まれ、その後も論文が発表されている.
- 4) 北野正雄: 「変位電流をめぐる混乱について」, 大学の物理教育 **27**, 22 (2021).
- 5) D.J. Griffiths: *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed. (Prentice Hall, 1999) problem 7.55.
- 6) 和田純夫: 電磁気学のききどころ (岩波書店, 1994) 問題 8.3.
- 7) 微分演算子  $\text{div}$ ,  $\text{curl}$ ,  $\text{grad}$  は適宜、ナブラ演算子  $\nabla$  を用いて表す。また、 $\partial_t = \partial/\partial t$  とおく。
- 8) J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (John Wiley & Sons, 1999) 5.3 節.
- 9)  $\rho$  と  $\mathbf{D}$  の正確な関係は  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_R) \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ,  $t_R = t - R/c_0$ ,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  であるが、 $\rho$  の時間変化が遅く、 $t \sim t_R$  が成り立つとする。
- 10) 例えば、文献<sup>5)</sup> 付録 B, 文献<sup>2)</sup> 付録 A.3, 文献<sup>8)</sup> 6.3 節. 分解の一意性の前提条件があるが、今は問題にならない。
- 11) 式 (5) について、空間に関するフーリエ変換を行うと、 $\forall \mathbf{k}: \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{J}}_L(\mathbf{k}) = 0$ ,  $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_T(\mathbf{k}) = 0$  となり、波数空間では、各  $\mathbf{k}$  において、縦場のベクトルはそれに平行、横場のベクトルはその直交平面に含まれることが分かる。
- 12) 微小電流要素  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r})$  の磁場は式 (1) より、 $\mathbf{p} \times \mathbf{G}(\mathbf{r})$ . 式 (3) に代入すると、 $(\mathbf{p} \times \nabla) \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r}) - (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{G}(\mathbf{r})$ . 左辺は磁気モーメントの磁場 (湧き出しなし) と、右辺第 2 項は電気双極子の電場 (渦

なし) とそれぞれ「同形」である. これらの場の原点の特異性については, 北野正雄: 新版マクスウェル方程式 (サイエンス社, 2009) 8.5.2 節参照.

- 13) R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics II* (Addison-Wesley, 1977) Sec. 18-2. 球対称 (実) 電流に対する磁場を拙速にゼロとは結論せず, 変位電流との打ち消しの結果であることを, 明快に示している.
- 14) 軸対称コンデンサにおける変位電流の扱いは, J.D. Jackson: *Eur. J. Phys.* **20** (1999) 495 が正確である.
- 15) 式 (10) の解は以下のように変形できる;

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int_{V'} dv' \frac{\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{4\pi R} = \int_{\partial V'} d\mathbf{S}' \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{4\pi R} \\ &- \int_{V'} dv' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{4\pi R} = \int_{V'} dv' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\end{aligned}$$

- 16) 紙面の制約で触れることができなかったが, 変位電流の議論には, ビオ・サバールの式の一般化である, ジェフィメンコの式がよく用いられる. ただし, 一般に引用される表式では, 遠方界 (輻射成分) の電場が伝搬方法に直交することが正しく表せていない. 詳しくは, K.T. McDonald: *Am. J. Phys.* **65** 1074 (1997).

連絡先 Email: kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp