

変位電流をめぐる混乱について

2021 年 6 月 16 日

北野正雄

応用科学研究所 / 京都大学名誉教授

1 はじめに

電束密度の時間微分である変位電流密度 $\partial_t \mathbf{D}$ ($\partial_t := \partial/\partial t$) は電磁気学のパズル完成のための最終ピースであった。マクスウェルは理論的考察から変位電流の存在を導き、通常の伝導電流にこれを加えたものを全電流と考えるべきという結論を得た¹⁾。その帰結として、電磁的な変動が波動として伝搬しうることを見出し、さらにその速度が電気定数 ϵ_0 、磁気定数 μ_0 を用いて $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ と表せることを示した。これが、測定されていた光の速さと一致することから、光がまさにその波動であると結論した。後に、ヘルツはコンデンサを用いて、変位電流の効果の検出を試みる過程で、電波を発見した²⁾。

磁場と電流に関するアンペールの式: $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ に変位電流密度 $\partial_t \mathbf{D}$ を新たに加えた式

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D} \quad (1)$$

は、1865 年の論文で導入され、マクスウェル・アンペールの式と呼ばれている。ところが、変位電流が存在する状況にあっても、通常の電流のみに基づくビオ・サバールの式で正しい磁場が求められることが、その後に明らかになってきた。つまり、「変位電流は磁場をつくらない」ように見えるということなのである³⁾。この逆説的な言明に対して様々な賛否の議論が展開されてきたが、なかなか決着が付かず、教科書や各国の物理教育の学会誌などでも繰り返し話題となるテーマである^{4, 5, 6)}。

本稿では、磁場を「電流」と「変位電流」それぞれに起因するものに分離することは原理的に不可能であることを示し、「変位電流は磁場をつくるか否

か」という設問そのものが無意味であることを明らかにする。また、ビオ・サバールの式には暗黙裡に変位電流の効果が含まれていることを示す。変位電流をめぐる混乱の様相についても議論する。

2 電流と変位電流の不可分性

ここでは、ベクトル解析における恒等式 $\text{div curl} = 0$ が重要な役割を果たす。アンペールの式の両辺の発散をとると、 $0 = \text{div } \mathbf{J}$ であり、電流の湧き出しがないことが、暗黙の前提になっている。(これは一般に「定常電流条件」と呼ばれるが、 $\partial_t \mathbf{J} = 0$ だけでなく、 $\text{div } \mathbf{J} = -\partial_t \rho = 0$ をも意味する。つまり電荷分布も時間変化しないということである。)

一方、マクスウェル・アンペールの式 (1) の発散 $0 = \text{div}(\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D})$ は、電荷の保存則

$$\text{div } \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0 \quad (2)$$

と $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ から保証されており、非定常電流 ($\text{div } \mathbf{J} \neq 0$) の場合にも、磁場 $\mathbf{H}$ が定義できるのである⁷⁾。

さて、「変位電流が磁場をつくるか否か」という問題設定は、磁場が $\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_{\partial_t \mathbf{D}}$ のように 2 種類に分割でき、それぞれに対して

$$\text{curl } \mathbf{H}_J \stackrel{?}{=} \mathbf{J}, \quad \text{curl } \mathbf{H}_{\partial_t \mathbf{D}} \stackrel{?}{=} \partial_t \mathbf{D} \quad (3)$$

が成り立つことを前提にしている。しかし、これらの発散は、 $0 \stackrel{?}{=} \text{div } \mathbf{J}$, $0 \stackrel{?}{=} \text{div } \partial_t \mathbf{D}$ であり、前提条件と矛盾し、何のために、変位電流を導入したのか分からない。非定常電流下では、「変位電流がつく

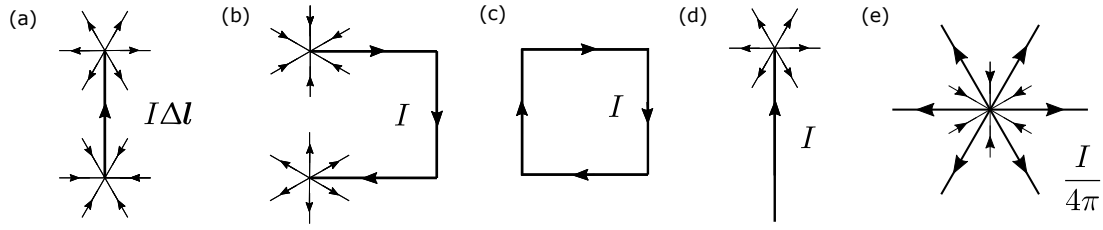


図 1: 電流 (太線) と変位電流 (細線)

る磁場」, 「電流がつくる磁場」といったものは定義できないのであり, それらを分ける試みは意味をなさない. 磁場との関係性において, 電流と変位電流は不可分のものである^{1, 17, 8)}.

重ね合わせのために, 式 (1) の右辺を分割する場合には, 電流密度の分割 $\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i$ に対応して, $\text{div } \mathbf{J}_i + \partial_t \text{div } \mathbf{D}_i = 0$ を満たすように, 変位電流密度 $\partial_t \mathbf{D}_i$ を導入し,

$$\text{curl } \mathbf{H}_i = \mathbf{J}_i + \partial_t \mathbf{D}_i \quad (4)$$

を満たす $\mathbf{H}_i$ の和 $\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{H}_i$ を求めることが必要である. $\partial_t \mathbf{D} = \sum_i \partial_t \mathbf{D}_i$ も成り立つ.

3 ビオ・サバールの式

1820 年, エルステッドが 2 つの閉路電流の間に磁気力が働くことを発見して間もなく, アンペールの法則とビオ・サバールの式が確立された.

ビオ・サバールの式は, 原点におかれた電流要素 $I\Delta\mathbf{l}$ に対する磁場要素

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = I\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{G}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{G}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \quad (5)$$

を仮定し, 閉路 L を流れる電流 I による, 位置 $\mathbf{r}$ における磁場を

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \oint_L d\mathbf{H}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \oint_L I d\mathbf{l}' \times \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6)$$

のように重ね合わせ (積分) で与えるものである. $d\mathbf{l}'$ は経路 L 上の位置 $\mathbf{r}'$ の線要素である. 要求される条件は, 「 L が閉じている」ことである. もし経路

が分断されていると, 端点において $\text{div } \mathbf{J} = \pm I \neq 0$ となり, 電荷の蓄積が起き, 「定常電流条件」を破ってしまうからである.

アンペールの法則は, 「定常電流条件」が破れている場合にも適用できるよう, 変位電流項が挿入され, 改訂されたのであるが, ビオ・サバールの式はどうであろうか.

通常, 磁場要素 (5) は, 閉路にわたって積分してはじめて意味があるとされるが, これが満たす方程式を調べてみよう. 渦を求めると,

$$\begin{aligned} \text{curl } \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= I\Delta\mathbf{l} [\nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r})] - (I\Delta\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{G}(\mathbf{r}) \\ &= I\Delta\mathbf{l} \delta^3(\mathbf{r}) + \partial_t \mathbf{D}_{It\Delta\mathbf{l}}(\mathbf{r}) =: \Delta\mathbf{J}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, 「全電流」要素 $\Delta\mathbf{J}_{\text{tot}}$ の第 1 項は元の電流要素 $I\Delta\mathbf{l}$ を表している. 第 2 項は原点に置かれた電気双極子 $\mathbf{p}$ の電束密度 $\mathbf{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) := -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{G}(\mathbf{r})$ の形をしている. 線要素 $\Delta\mathbf{l}$ に一定電流 I を流すと, 両端 $\pm\Delta\mathbf{l}/2$ に電荷 $\pm q(t) = \pm It$ が蓄積される ($q(0) = 0$ とする). 結果, 時間に依存する電束密度 $\mathbf{D}_{It\Delta\mathbf{l}}(\mathbf{r})$, つまり, 双極子型の変位電流が生じている (図 1(a)).

$\text{div}(\mu_0 \Delta\mathbf{H}) = -\mu_0 I\Delta\mathbf{l} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$ も成り立つので, 式 (5) の磁場要素 $\Delta\mathbf{H}$ は, 電流要素 $I\Delta\mathbf{l}$ に変位電流を加えた $\Delta\mathbf{J}_{\text{tot}}$ が作る磁場であるといえる. 式 (7) は式 (4) に従う, 正しい電流分割になっている.

磁場要素 $\Delta\mathbf{H}$ の重ね合わせ $\int_L d\mathbf{H}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は, 当然マクスウェル・アンペールの式 (1) を満たす. その際, 式 (6) とは異なって「 L が閉じている」という制約は不要である.

式 (7) の右辺を, 始点 (終点) が $\mathbf{r}_1$ ($\mathbf{r}_2$) の経路 L について積分すると,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) &= \int_L d\mathbf{J}_{\text{tot}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &= I \int_L d\mathbf{l}' \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + I\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \quad (8)\end{aligned}$$

第1項は経路 L に沿った実電流 $\mathbf{J}$, 第2項は経路の端点における変位電流 $\mathbf{J}_{\text{disp}}$ を表す. 電流要素同士を接続 (積分) してゆく際に, 向かい合う端点からの変位電流は打ち消しあって, 最終的には経路の両端のものだけが残る (図1(b)). 閉じた経路では, 変位電流はすべて打ち消し合ってゼロになる (図1(c)).

ビオ・サバールの式 (6) は, $\oint \rightarrow \int$ とするだけで, 当初の想定を超えて, 非定常電流に対しても使えるのである. (また, 3次元の電流分布にも拡張できる.) 電流分布 $\mathbf{J}$ に対する積分ではあるが, 変位電流を含む全電流 $\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{disp}}$ が自動的に計算され, それに対する磁場を与えている⁹⁾. この「隠されたトリック」が混乱の原因にもなっている. マクスウェルの変位電流導入より, 40年以上も前のビオ・サバールの式に, その効果が内包されていたのは興味深い事実である¹⁰⁾.

ビオ・サバールの電流要素による磁場と等速運動する電荷による磁場の関係調べておこう. 速度 $\mathbf{v}$ で等速運動する電荷 q に伴う磁場 $\mathbf{H}_v$ は, 静止系のクーロン電場 $\mathbf{D}_0(\bar{\mathbf{r}}) = q\mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}})$ にガリレイ変換 $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ を施すことで得られる.^{11, 12, 13)}

$$\mathbf{H}_v(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v} \times \mathbf{D}_0(\bar{\mathbf{r}}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \quad (9)$$

$q\mathbf{v} = I d\mathbf{l}$ とすれば, 式 (5) と同じ形になる.

静止系における, 点電荷とクーロン電場の一体性が, 運動に伴って, 点状電流, 双極子型変位電流, ビオ・サバール型磁場に引き継がれている.

4 半無限電流

変位電流の効果を見るために半無限直線電流がよく用いられる (図1(d)). z 軸の $z \leq 0$ の部分を

一定電流 I が流れている場合, 原点に電荷 $q(t) = It + q(0)$ が蓄積され, それを中心にクーロン型の電束密度とそれに伴う変位電流密度 $\partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = I\mathbf{G}(\mathbf{r})$ が生ずる. 円筒座標系 (ρ, ϕ, z) を用いると¹⁴⁾, 2通りの方法で磁場 $H_\phi(\rho, z)$ を求めることができる.

1つ目はマクスウェル・アンペールの式 (1) の積分型 $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}$ を使うことである. ここで, 右辺の $S (= \partial C)$ は与えられた閉曲線 C を境界とする「任意の曲面」である. どの曲面を選んでも, 積分が同じ値になるためには, すべての場所で $\text{div}(\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}) = 0$ である必要がある. 原点中心, 半径 $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ の球面と $z = \text{const}$ の平面の交わりである円 C と北 (南) 極側の球冠の表面 $S (S')$ を考えると,

$$\begin{aligned}2\pi\rho H_\phi(\rho, z) &= (I/2)(1 \mp \text{sgn}(z)) \\ &+ (I/2) \left[\pm \text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right] \quad (10)\end{aligned}$$

ただし, $\text{sgn}(z) = z/|z|$. $C = \partial S = -\partial S'$ であることに注意する. 整理すると, 曲面の選び方によらず,

$$H_\phi(\rho, z) = \frac{I}{4\pi\rho} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \quad (11)$$

複号の打ち消しは, 電流と変位電流の不可分性の現れである.

2つ目はビオ・サバールの式 (6) を「開いた経路」 $L = (-\infty, 0]$ に適用すると, 式 (11) に一致する.

$$H_\phi(\rho, z) = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\rho dz'}{[(z - z')^2 + \rho^2]^{3/2}} \quad (12)$$

5 球対称の電流分布と磁場

「球対称の電流分布は磁場を作らない」という主張は, 「変位電流が磁場をつくらない」根拠として, しばしば利用されてきた^{5, 6)}. 電流の不連続端から放射状に出る「変位電流は球対称であるので, 磁場を作ることはない」というのである.

球対称の電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I\mathbf{G}(\mathbf{r})$ は $\text{div } \mathbf{J} = I\delta^3(\mathbf{r}) \neq 0$ を満たし、原点での発散がゼロではなく、「電流がつくる磁場」という考えが意味をもたない状況にある。図 1(e) のように、多くの (外向き) 半無限電流の端点を原点に集め、等方的に束ねた場合を考える。原点の電荷は $q(t) = -It + q(0)$ で、変位電流密度は $\partial_t \mathbf{D} = -I\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}$ となり、実電流を打ち消している。「球対称電流の磁場は、変位電流なしには存在しえず、変位電流を考慮すれば、 $\mathbf{J}_{\text{tot}} = 0$ であることから、ゼロになる」のである。文献⁵⁾の図 9.6 の説明や、文献⁶⁾の式 (7.28) は、ビオ・サバールの式を用いており、著者の意図に反して、変位電流の効果を含んでしまっている。同様に、「球対称の変位電流がつくる磁場」と称して計算されているのは、「変位電流の全電流」($= 0$) によるものである⁹⁾。

6 おわりに

マクスウェルが変位電流を考え出したきっかけは、充電中のコンデンサである。このモデルを用いて、電極間の変位電流が磁場をつくるか否かの論争が続いている³⁾。しかし、どんな計算方法によっても、間違わなければ磁場は同じである¹⁵⁾。

デモ実験¹⁶⁾も多く行われているが、無駄に磁場の起源を詮索するよりも、電極間の磁場の「渦」を測ることが重要である。変位電流なしに、渦の存在は説明できないからである。また、コンデンサへの配線の経路を変更する (たとえば、コイル状にする) と、極板間の磁場も変化するが、渦は保たれるのを確認するのも面白い。軸対称性は解析上の便宜のためであり、本質的ではない。

変位電流の意義をめぐる長年の論争は、「磁場をつくるかつくらないか」という二項対立に陥り、出口が見えない状況になっている。混乱の原因は、以下の微妙な真実が見逃されていることによる。

- (1) 非定常電流の場合、「電流がつくる磁場」、「変位電流がつくる磁場」はいずれも定義できない。

- (2) 変位電流と電流の不可分性を無視した分割はできない。
- (3) ビオ・サバールの式で計算される磁場には、変位電流の効果が自動的に織り込まれている。

これらをしっかり心に留めて、過去の論文、教科書に当ることを勧めたい。

本稿をまとめるにあたって、霜田光一先生、中田陽介氏、中西俊博氏に有益な議論をしていただいた。

参考文献と注釈

- 1) J.C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism, vol. II (Dover, 1954) part IV, chap. IX.
- 2) T.K. Simpson: Maxwell on the Electromagnetic Field (Rutgers Univ. Press, 1997) p. 292.
- 3) J. Roche: Eur. J. Phys. **19**, 155 (1998).
- 4) 米国では, Am. J. Phys., 欧州では, Eur. J. Phys. に多くの論文が投稿されている。我が国でも, 「物理教育」の 60 号 (2012) において, このテーマに関する特集が組まれた。
- 5) E.M. Purcell and D.J. Morin: Electricity and Magnetism, 3rd ed. (Cambridge Univ. Press, 2013) section 9.2.
- 6) 太田浩一: 電磁気学の基礎 I (東京大学出版会, 2012) 11 章。
- 7) 「 $\text{div } \mathbf{b} = 0$ なら, $\text{curl } \mathbf{a} = \mathbf{b}$ となるベクトル場 $\mathbf{a}$ が存在する」は「ポアンカレの補題」の一例である。
- 8) 電流は, 電荷とともに電磁気と外界との接続を担う外的な量である。一方, 電束の時間変化である変位電流は内的な量である。変位電流は電流の分布が与えられれば, 自動的に定まる。両者は不可分であるからといって, 同一視することはできない。電流を方程式の右辺, 変位電流を左辺に置くのは自然である。ビオ・サバールの式は電流を外力とする解である。
- 9) 得られた $\mathbf{J}_{\text{tot}}$, $\mathbf{J}_{\text{disp}}$ を仮に実電流だと見なすと, $(\mathbf{J}_{\text{tot}})_{\text{tot}} = \mathbf{J}_{\text{tot}}$, $(\mathbf{J}_{\text{disp}})_{\text{tot}} = (\mathbf{J}_{\text{tot}})_{\text{disp}} = 0$, $(\mathbf{J}_{\text{disp}})_{\text{disp}} = -\mathbf{J}_{\text{disp}}$ という美しい関係が成り立つ。
- 10) 多くの教科書は閉路条件を強調するだけに終わっている。例外は, 例えば文献¹¹⁾と, D.J. Griffiths: Introduction to Electrodynamics, 3rd ed. (Prentice Hall, 1999) problem 7.55
- 11) 今井功: 電磁気学を考える (サイエンス社, 1990) p. 85.

- 12) 北野正雄: 新版 マクスウェル方程式 (サイエンス社, 2009) p. 101.
- 13) エリ・ランダウ, イェ・リフシッツ: 場の古典論 (増訂新版) (東京図書, 1964) 38 節.
- 14) 軸対称 ($\partial_\phi = 0$) の場合, $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}' := \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}$, $\text{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = 0$ は, $(H_\phi; J'_\rho, J'_z)$, $(H_\rho, H_z; J'_\phi)$ を含む方程式群に分離される. ここでは $J'_\phi = 0$ を仮定し, 前者 (トロイダルモード) のみを扱う. 磁場は H_ϕ だけで決まる.
- 15) J.D. Jackson: Eur. J. Phys. **20**, 495 (1999). 正しい電流の分割の例を示している.
- 16) D.F. Bartlett and T.R. Corle: Phys. Rev. Lett. **55**, 59 (1985). 注意深い実験であるが, 著者たちも認めているように, ビオ・サバールの式でも説明できる結果である.
- 17) 石原諭: 物理教育 **61**, 187 (2013).

連絡先 Email: kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp