相対論的構成方程式とホッジ双対

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2011 年 3 月 9 日

1 マクスウェル方程式の相対論的表現

まず, Jackson の教科書 [1] に沿って, 通常のスカラー・ベクトル形式で書かれた Maxwell 方程式を相対論的に整理する. ただし, ガウス単位系ではなく SI を用い, 次元に注意を払いながら整理する.

まず, Maxwell 方程式のなかで, 源に関係する 2 つの式

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial}{\partial(ct)}(c\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (c\boldsymbol{D}) = c\varrho \tag{1}$$

に注目する. 変数や演算子を 4 元のテンソルあるいはベクトルとして,

$$\tilde{G}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & H_z & -H_y \\ -cD_y & -H_z & 0 & H_x \\ -cD_z & H_y & -H_x & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{SI}}{\sim} \text{A/m}, \quad \partial_\beta = \begin{bmatrix} c^{-1}\partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}^\alpha = \begin{bmatrix} c\varrho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \overset{\text{SI}}{\sim} \text{A/m}^2, \tag{2}$$

のようにまとめると, 相対論的表式

$$\partial_\beta \tilde{G}^{\alpha\beta} = \tilde{G}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \tilde{J}^\alpha \tag{3}$$

が得られる[1]. 添字は 0 は時間成分, $1, 2, 3$ は x, y, z 成分に相当する. また, 添字中のコンマ “,” は直後の添字に関して微分することを表している.

一方, Maxwell 方程式のうちで, 力に関係する 2 つの式

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial(ct)}(c\boldsymbol{B}) = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (c\boldsymbol{B}) = 0 \tag{4}$$

は,

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ -cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ -cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{SI}}{\sim} \text{V/m}, \tag{5}$$

を導入することにより, 相対論的にまとめることができる :

$$\partial_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = \tilde{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0. \tag{6}$$

[1] 後に述べる理由により, “~” をつけておく.

このように, 4 つの場の量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ は 2 つの 2 階の 4 元反対称テンソル $\tilde{F}^{\alpha\beta}$, $\tilde{G}^{\alpha\beta}$ に集約される. 真空中では構成方程式 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H} = \mu_0^{-1}\boldsymbol{B}$ が成り立つので, これら 2 つのテンソルは, 次のように関係づけられる：

$$\tilde{G}^{\alpha\beta} = Y_0(\underline{*}\tilde{F})^{\alpha\beta}, \quad \text{あるいは}, \quad \tilde{F}^{\alpha\beta} = -Z_0(\underline{*}\tilde{G})^{\alpha\beta}. \tag{7}$$

$Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \Omega$ は真空のインピーダンスである.

演算子 $\underline{*}$ は 4 元のホッジ (星型) 作用素であり, 2 階の反対称反変テンソルに対する具体的な働きは,

$$(\underline{*}A)^{ij} = A^{0k}, \quad (\underline{*}A)^{0i} = -A^{jk} \tag{8}$$

で与えられる. i, j, k は空間に関するサイクリックな添字である. $\underline{**} = -1$, すなわち $\underline{*}^{-1} = -\underline{*}$ であることに注意する.

ホッジ作用素は, 添字計算に適した記法では

$$(\underline{*}A)^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}A^{\gamma\delta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta}A^{\gamma\delta} \tag{9}$$

と表される. ここで, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は 4 元の 4 階完全反対称テンソルで, その成分は

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & (\alpha\beta\gamma\delta \text{ が } 0123 \text{ の偶置換のとき}) \\ -1 & (\text{奇置換のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{10}$$

と表すことができる[2]. $g^{\alpha\beta}$ は計量テンソル (の共役) である：

$$g^{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & (\alpha = \beta = 0) \\ 1 & (\alpha = \beta \neq 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}. \tag{11}$$

式 (7) は真空の構成方程式を相対論的に表したものであり, 2 つの役割を担っている. 1 つ目は物理的次元の異なるテンソル $\tilde{G}$, $\tilde{F}$ を真空のインピーダンス Z_0 を介して関係づけている. 2 つ目はホッジ双対の関係を示している. ホッジ作用素は基底の向きづけ[3] と計量に依存することに注意する.

結局, マクスウェル方程式は,

$$\partial_\beta \tilde{G}^{\alpha\beta} = \tilde{J}^\alpha, \quad \partial_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0, \quad \tilde{G}^{\alpha\beta} = Y_0(\underline{*}\tilde{F})^{\alpha\beta} \tag{12}$$

とまとめることができる. ただ, この表式は 2 つの点でかなり不自然なものになっている. 本来, 場の物理量を表すテンソルの成分は共変（下添字）であるべきであるにもかかわらず, すべての量が反変テンソル（上添字）として与えられている. 微分演算子が共変であり, それとの縮約をとるためである. さらに, 式 (2), (5) において, D, B といった空間的な 2 形式であるべき量が時間と空間に関する添字を持つこと, 逆に, E, H が空間的な 2 つの添字をもつことが極めて不自然である. これらの不自然さの原因は, 出発点の 3 元的マクスウェル方程式が微分形式ではなく, スカラー・ベクトル記法で表されていることによる.

1.1 ビアンキの恒等式

一般のテキストでは, さらに次のような変形がなされる. 共変テンソル $F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{F}^{\gamma\delta}$ を導入し, これを逆に解いた式 $\tilde{F}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$ を式 (6) に代入する；

$$0 = \partial_\beta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta}. \tag{13}$$

[2] 置換の偶奇性は, 3 次元の場合はサイクリック, 反サイクリックによって簡単に判別できるが, 4 次元ではそうではない. 0 が先頭の場合は残る空間部分がサイクリックかどうかで判断できる. そうでない場合は互換によって 0 を先頭に置き, 空間部分がサイクリック (反サイクリック) の場合は奇 (偶) であることが分かる.

[3] $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ はテンソルではなく擬テンソルである. そのために, ホッジ作用素はテンソルを擬テンソルに, 擬テンソルをテンソルに変換する.

ここで, α を固定して考えると, ゼロでない項は 6 項あり,

$$0 = \partial_\beta(F_{\gamma\delta} - F_{\delta\gamma}) + \partial_\gamma(F_{\delta\beta} - F_{\beta\delta}) + \partial_\delta(F_{\beta\gamma} - F_{\gamma\beta}) = 2\left(\partial_\beta F_{\gamma\delta} + \partial_\gamma F_{\delta\beta} + \partial_\delta F_{\beta\gamma}\right) \tag{14}$$

と書き直すことができる. 添字の組み合わせは任意であるが, 実質的には 4 つの式を表している. 具体的に $F_{\alpha\beta}$ を行列表示すると

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

この式を, 構成方程式を考慮して, 式 (2) の $\tilde{G}^{\alpha\beta}$ と比較すると, 時間添字 0 を含む要素の符号が異なることが分かる. したがって, 計量テンソルを用いて

$$\tilde{G}^{\alpha\beta} = Y_0 g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\gamma\delta} = Y_0 F^{\alpha\beta} \tag{16}$$

と表すことができる. これを 式 (3) に代入すると $Y_0 \partial_\beta F^{\alpha\beta} = \tilde{J}^\alpha$ とできる. つまり相対論的マクスウェル方程式は

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = Z_0 \tilde{J}^\alpha, \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{17}$$

と書くことができる. 一般的によく用いられる式である. たしかに, 3 元の場合より式の数は少ないが, 対称性が損なわれており, 決して美しいとはいえない. また, 共変量と反変量が混じっていて, 見通しが悪い. これはホッジ作用素で表される構成方程式を拙速に消去してしまったことによる.

2　微分形式による方程式

3 元微分形式で表されたマクスウェル方程式 [3] を出発点にしてみよう. 基底を $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 対応する双対基底を $\{\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ とおく. $\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \delta^\mu_\nu$ である.

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{H} - \frac{\partial}{\partial(ct)}(c\mathsf{D}) = \mathsf{J}, \quad \boldsymbol{\nabla} \wedge (c\mathsf{D}) = \mathcal{R} \tag{18}$$

は, $\underline{\mathsf{G}} = \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{H} + c\mathsf{D}$, $\underline{\mathcal{J}} = \boldsymbol{e}^0 \wedge (-\mathsf{J}) + c\mathcal{R}$, $\underline{\boldsymbol{\nabla}} = c^{-1}\partial_t \boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{\nabla}$ とおけば,

$$\underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{\mathsf{G}} = \underline{\mathcal{J}} \tag{19}$$

とまとめることができる. 成分で表すと,

$$\partial_\gamma \wedge G_{\alpha\beta} = G_{[\alpha\beta,\gamma]} = J_{\alpha\beta\gamma}. \tag{20}$$

ただし, $\wedge$ は反対称積を表す. 添字の $_{[]}$ は中に含まれる添字たちに関して反対称化を行うことを表す. また, 添字の , は直後の添字による微分を表す.

テンソル $G_{\alpha\beta}$ の具体的な形は

$$G_{\alpha\beta} = \underline{\mathsf{G}} : \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & cD_z & -cD_y \\ -H_y & -cD_z & 0 & cD_x \\ -H_z & cD_y & -cD_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

前節の $\tilde{G}^{\alpha\beta}$, $\tilde{J}^\alpha$ との関係は

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}^{\gamma\delta}, \quad J_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{J}^\alpha, \quad \text{または}, \quad \tilde{G}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\gamma\delta}, \quad \tilde{J}_\alpha = -\frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}J_{\beta\gamma\delta} \tag{22}$$

と表せる.
同様に

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial(ct)}(cB) = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} \wedge (cB) = 0 \tag{23}$$

は, $\underline{F} = \boldsymbol{e}^0 \wedge (-\boldsymbol{E}) + cB$ とおけば,

$$\underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{F} = 0 \tag{24}$$

となる. 成分では,

$$\partial_\gamma \wedge F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0 \tag{25}$$

テンソルの具体的な形は

$$F_{\alpha\beta} = \underline{F} : \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

前節の $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ との関係は

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{F}^{\gamma\delta}, \quad \text{または,} \quad \tilde{F}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \tag{27}$$

と表せる.
4 元 2 形式に対するホッジの関係式は, $\boldsymbol{X}$, Y をそれぞれ 3 元 1 形式, 3 元 2 形式とすると,

$$\underline{*}(\boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{X} + Y) = \boldsymbol{e}^0 \wedge (-(*Y)) + (*\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{e}^0 \wedge (-\boldsymbol{Y}) + X \tag{28}$$

と表せる. $*$ は 3 元のホッジ作用素である[4]. これを利用して, 構成方程式 $D = \varepsilon_0 * \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H} = \mu_0^{-1} * B$ は,

$$\underline{G} = -Y_0 \underline{*F}, \quad \text{あるいは,} \quad \underline{F} = Z_0 \underline{*G} \tag{29}$$

と表すことができる. 成分では,

$$G_{\alpha\beta} = -Y_0(\underline{*}F)_{\alpha\beta}, \quad \text{あるいは,} \quad F_{\alpha\beta} = Z_0(\underline{*}G)_{\alpha\beta} \tag{30}$$

ただし, 星型作用素の 2 階反対称共変テンソルに対する作用は

$$(\underline{*}A)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}A_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}A_{\gamma\delta} \tag{31}$$

反対称テンソル記法でのマクスウェル方程式を再掲すると,

$$\partial_\gamma \wedge G_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta\gamma}, \quad \partial_\gamma \wedge F_{\alpha\beta} = 0, \quad F_{\alpha\beta} = Z_0(\underline{*}G_{\alpha\beta}) \tag{32}$$

あるいは,

$$\underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{G} = \underline{J}, \quad \underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{F} = 0, \quad \underline{F} = Z_0(\underline{*G}) \tag{33}$$

のように明快で覚えやすいものになっている.

[4] $\mathrm{i}(X + \mathrm{i}Y) = -Y + \mathrm{i}X$ との代数的類似性に注意する. 形式的に, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} + \mathrm{i}c\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{E} + \mathrm{i}c\boldsymbol{B}$ とおくと, $\boldsymbol{G} = -\mathrm{i}Y_0\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{H} = \mathrm{i}Z_0\boldsymbol{G}$ が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
(Y_0F^{\alpha\beta} =)\tilde{G}^{\alpha\beta} \arrow[r, shift left, "-\underline{*}"] \arrow[d, shift right, "\mathfrak{E}"'] \arrow[dr, shift left, "\underline{g}^\dagger\underline{g}^\dagger"'] & \tilde{F}^{\alpha\beta}(= Z_0G^{\alpha\beta}) \arrow[l, shift left, "\underline{*}"] \arrow[d, shift left, "\mathfrak{E}"] \arrow[dl, shift left] \\
G_{\alpha\beta} \arrow[u, shift right, "\mathfrak{E}^\dagger"'] \arrow[r, shift left, "\underline{*}"] \arrow[ur, shift left, "\underline{g}\,\underline{g}"] & F_{\alpha\beta} \arrow[l, shift left, "-\underline{*}"] \arrow[u, shift left, "\mathfrak{E}^\dagger"] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}
$$

図 1: 相対論的マクスウェル方程式における 2 階テンソルのバリエーションとそれらの関係. 左列は源場 (D, H), 右列は力場 (E, B) に関するものである. G, F は次元が異なるので, 変換に際しては真空のインピーダンス $Z_0 = Y_0^{-1}$ を用いて $G = Y_0F$, $F = Z_0G$ のように次元を変える必要があるが, 図中では省略する. “$\underline{*}$” はホッジ作用素, “$\mathfrak{E}$”, “$\mathfrak{E}^\dagger$” はレビ・チビタによる変換, “$\underline{g}\,\underline{g}$” は計量による添字の上げ下げを示す. ガウス単位系では左列, 右列の区別が希薄になる. 上段はスカラー・ベクトル形式から導かれるテンソルである. 下段は微分形式から導かれるテンソルである. ホッジ作用素を避ける流儀では, 対角線上に位置する $F_{\alpha\beta}$, $F^{\alpha\beta}$ の組が用いられる.

3　ポテンシャル, 電荷保存

4 元ベクトルポテンシャルを $\underline{\boldsymbol{A}} = \phi\boldsymbol{e}^0 + c(-\boldsymbol{A})$, すなわち

$$A_\alpha = (\phi, -cA_x, -cA_y, -cA_z) \tag{34}$$

と定義すれば, $\underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{\boldsymbol{A}} = \underline{F}$, すなわち,

$$\partial_\alpha \wedge A_\beta = F_{\alpha\beta} \tag{35}$$

となる.

電荷の保存は,

$$0 = \underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{G} = \underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \underline{\mathcal{R}} = \boldsymbol{e}^0 \wedge (\partial_t\mathcal{R} + \boldsymbol{\nabla} \wedge J) \tag{36}$$

のように示すことができる.

4　ローレンツ力の相対論的表現

速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する電荷 q のエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} \tag{37}$$

である. これを参考に, 4 元速度を $u^\alpha = [c\gamma, u_x, u_y, u_z]$, 4 元運動量を $p_\alpha = [-E/c, p_x, p_y, p_z]$ とおくと, 運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = qF_{\alpha\beta}u^\beta \tag{38}$$

となる. $\tau = t/\gamma$ は運動する電荷の固有時, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$. さらに, 作用 (の変化) ΔS は

$$\Delta S = p_\alpha\Delta x^\alpha = -E\Delta t + \boldsymbol{p}\cdot\Delta\boldsymbol{x} \tag{39}$$

と表される.

5　公式

5.1　レビ・チビタの記号

4 階の完全反対称テンソルのいくつかの性質を確認しておく．まず, 共変, 反変の関係であるが,

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\gamma\sigma} g^{\delta\tau} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \tag{40}$$

と, $g^{00} = -1$ より, $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123}$ であることが分かる．他の成分に関しても同様である．ここでは, $\epsilon^{0123} = 1$ であるとする．

縮約に関しては以下の式が成り立つ；

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 \quad (= -4!) \tag{41}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\tau} = -6\delta^{\delta}_{\tau} \tag{42}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} = -2(\delta^{\gamma}_{\sigma}\delta^{\delta}_{\tau} - \delta^{\gamma}_{\tau}\delta^{\delta}_{\sigma}) = -4\delta^{\gamma}_{[\sigma}\delta^{\delta}_{\tau]} \tag{43}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\nu\sigma\tau} = -6\delta^{\beta}_{[\nu}\delta^{\gamma}_{\ \sigma}\delta^{\delta}_{\tau]} \tag{44}$$

5.2　2 階の反対称テンソルに関するホッジ双対

2 階テンソル $A_{\alpha\beta}$ に対するホッジ双対 $(\underline{*}A)_{\alpha\beta}$ は, 任意の $B_{\gamma\delta}$ に対して

$$(\underline{*}A)_{\alpha\beta} \wedge B_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(A^{\mu\nu}B_{\mu\nu})\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{45}$$

を満たす [2]．ウエッジ積と内積の関係を示す式であり, 成分によらないホッジ双対の定義でもある[5]．

$\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}A_{\mu\nu}$ が $A_{\alpha\beta}$ に対するホッジ双対であることを示そう．式 (45) の左辺に代入して, $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ と縮約すると,

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}A_{\mu\nu}) \wedge B_{\gamma\delta} = 3\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}A_{\mu\nu}B_{\gamma\delta} = 3\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\mu\nu}B_{\gamma\delta} = -12A^{\gamma\delta}B_{\gamma\delta} \tag{46}$$

右辺も同じ縮約によって $-12A^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ となる．また,

$$\begin{aligned}(\underline{**}A)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\epsilon_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\gamma\delta\mu\nu}A_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu})A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) = -A_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{47}$$

より, $\underline{**} = -1$ であることが分かる．

5.3　添字の上げ下げ

空間 3 次元の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に時間軸を表す $\boldsymbol{e}_0$ を加えて, 4 元の基底を $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ とおく．4 元ベクトルは

$$\underline{\boldsymbol{x}} = ct\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_2 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha} \tag{48}$$

と表す．内積は

$$(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}) = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = x^{\alpha}x^{\beta}(\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}) = x^{\alpha}g_{\alpha\beta}x^{\beta} = x_{\beta}x^{\beta} \tag{49}$$

と表すことができる．$x_{\beta} = x^{\alpha}g_{\alpha\beta}$, $(\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}) = g_{\alpha\beta}$ とおいた．

[5] 4 元体積形式を $\mathfrak{E} = \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3$ とすれば, 1 形式, 2 形式, 3 形式 のホッジ双対はそれぞれ, $(\underline{*}\boldsymbol{A}) \wedge \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\mathfrak{E}$, $(\underline{*}\mathsf{A}) \wedge \mathsf{B} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})\mathfrak{E}$, $(\underline{*}\mathcal{A}) \wedge \mathcal{B} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})\mathfrak{E}$ のように定義される．p 形式（の要素）の内積は $(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_p) = |(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)|$ ($||$ は行列式) で定義される．

一方, 対応する双対基底を $\{\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ とおく. $\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \delta^\mu_\nu$ である. 双対は内積とは異なった概念であり, 計量とは無関係に設定できることに注意する.

固定した 4 元ベクトル $\underline{\boldsymbol{z}}$ に対して, 任意の 4 元ベクトル $\underline{\boldsymbol{x}}$ について,

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}} = (\underline{\boldsymbol{z}}, \underline{\boldsymbol{x}}) \tag{50}$$

を満たす 4 元双対ベクトル $\underline{\boldsymbol{a}} = a_\beta \boldsymbol{e}^\beta$ を導入する. 左辺, 右辺はそれぞれ

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}} &= a_\beta x^\alpha \boldsymbol{e}^\beta \cdot \boldsymbol{e}_\alpha = a_\beta x^\alpha \delta^\beta_\alpha = a_\beta x^\beta, \\ (\underline{\boldsymbol{z}}, \underline{\boldsymbol{x}}) &= z^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta \end{aligned} \tag{51}$$

これらを比較すると, $a_\beta = z_\alpha g_{\alpha\beta}$ とすればよいことが分かる. この $\underline{\boldsymbol{z}}$ で決まる双対ベクトル $\underline{\boldsymbol{a}}$ を

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{z}}^\dagger = z^\alpha g_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}^\beta = z_\beta \boldsymbol{e}^\beta \tag{52}$$

と表すことにする. $(\boldsymbol{e}_0)^\dagger = -\boldsymbol{e}^0$, $(\boldsymbol{e}_i)^\dagger = \boldsymbol{e}^i$ $(i = 1, 2, 3)$, すなわち, $(\boldsymbol{e}_\alpha)^\dagger = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}^\beta$ である[6]. 双対ベクトルに対する共役は同様に定義される. $(\underline{\boldsymbol{z}}^\dagger)^\dagger = \underline{\boldsymbol{z}}$, $(\underline{\boldsymbol{a}}^\dagger)^\dagger = \underline{\boldsymbol{a}}$ が成り立つ. すなわち, $^{\dagger\dagger} = 1$ である.

4 元の 4 階完全反対称テンソル (体積要素) を

$$\mathfrak{E} = \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \boldsymbol{e}^\alpha \boldsymbol{e}^\beta \boldsymbol{e}^\gamma \boldsymbol{e}^\delta \tag{53}$$

のように導入する.

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^\dagger &= (\boldsymbol{e}^0)^\dagger \wedge (\boldsymbol{e}^1)^\dagger \wedge (\boldsymbol{e}^2)^\dagger \wedge (\boldsymbol{e}^3)^\dagger = (-\boldsymbol{e}_0) \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\gamma\sigma} g^{\delta\tau} \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{e}_\nu \boldsymbol{e}_\sigma \boldsymbol{e}_\tau = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{e}_\nu \boldsymbol{e}_\sigma \boldsymbol{e}_\tau \end{aligned} \tag{54}$$

ただし, $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\gamma\sigma} g^{\delta\tau}$ である. $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123}$ であることに注意する. $\epsilon_{0123} = 1$ とおくことにする.

計量テンソル (とその共役) は,

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{g}} &= g_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}^\alpha \boldsymbol{e}^\beta, \\ \underline{\boldsymbol{g}}^\dagger &= g_{\alpha\beta} (\boldsymbol{e}^\alpha)^\dagger (\boldsymbol{e}^\beta)^\dagger = g_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{e}_\nu = g^{\mu\nu} \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{e}_\nu \end{aligned} \tag{55}$$

参考文献

[1] J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 3rd ed. (John Wiley & Sons, 1998).

[2] H. Flanders: Differential Forms with Applications to the Physical Sciences (Dover, 1989) p. 15.

[3] 北野正雄: 新版 マクスウェル方程式 (サイエンス社, 2009).

[6] うっかり書いてしまいそうな $\boldsymbol{e}_\alpha = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}^\beta$ は厳密には正しくない式である.