半無限ソレノイド間の力と磁荷に対するクーロンの法則
— 磁極の廃棄に向けて

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2006 年 9 月 18 日

永久磁石は多数の微小な磁気モーメントが整列した状態である. 磁気モーメントは電気双極子モーメントとのアナロジを利用して逆符号の磁荷 (磁気単極) が隣接したものとして表されることが多い. しかし, 実際には微小な環状電流で表す方がより適切である. 前者の考えに基づいて, 永久磁石の磁気モーメントを粗視化すると端面に磁荷が表れる. これが磁極と呼ばれるものである. 一方, 後者のモデルを採用すると, 端面ではなく側面に電流が周回している状態が得られる. 磁極に相当する端面には電流は流れておらず, 磁場への寄与はない. 奇異に思えるかも知れないが, 等価な空心の電磁石の電流分布と同じものになる.

後者の考えは, 等価電磁石との対応のよさや, 磁荷や磁極といった実際に存在しないものを導入する必要がないという点で合理的であるが, 一般に用いられることは少ない. 文献 [1] でも詳しく述べたように, 磁荷や磁極の概念をできるだけ用いないことが望ましい. ([1] ではメッセージを強調するため「磁極 — 廃棄すべき概念」という過激すぎるタイトルをつけた.) そこでよく出る質問は, では, 永久磁石の間の力をどのように説明するのかというものである. すなわち磁極を構成する磁荷間に働く力の総和として求めていた磁石間の力を, 一体どのように計算すればよいのかという質問である. 答えは「巨視的な電流間の力を計算すればよい」という単純なものなのだが, 電流の流れている場所と磁極の場所が全く異なるので、違和感をもって受け止められる場合が多い. ここでは, 問題を単純化して, 2 つの磁荷の間に働く力 (磁荷間のクーロンの法則) を電流の間の力として求めよう.

図 1 に示すように半無限の十分細いソレノイドの端部は磁気単極とみなすことができる. (無限に長いソレノイドが外部に作る磁場はゼロであることを思いだそう.) 2 つのこのようなソレノイド間の力が, 磁荷に対するクーロンの法則に一致すること示す.

1 準備

記法上の準備をしておく. 位置 $\boldsymbol{r}$ の関数

$$G_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}|}, \quad \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}}{4\pi|\boldsymbol{r}|^3} = -\boldsymbol{\nabla} G_0(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

を導入する. これらを用いて, 原点におかれた点電荷 q がつくるポテンシャルは $\phi(\boldsymbol{r}) = (q/\varepsilon_0)G_0(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r}_1$ に置かれた点電荷 q_1 が, $\boldsymbol{r}_2$ にある点電荷 q_2 からうける力は $\boldsymbol{F}_{12} = (q_1 q_2/\varepsilon_0)\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$, などと書くことができる. また, ビオ・サバールの法則は $\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \mathrm{d}\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r})$ と表せる. ここで, $\mathrm{d}\boldsymbol{C} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は原点におかれた電流モーメントを表す.

2 ソレノイドの電流分布

ソレノイドの構成要素として無限小ループ電流を考える. 原点におかれた無限小ループ電流の電流密度は

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{r}) = (-\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\nabla})\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

と表わせる. $\boldsymbol{m}$ は磁気モーメントで単位は $\mathrm{A\,m^2}$, $\delta^3(\boldsymbol{r})$ は 3 次元デルタ関数である. このような無限小ループ電流を曲線 L_a に沿って一定の線密度 (長さあたり κ_a) で一様に積み重ねると細いソレノイドが得られる. ただし, $\boldsymbol{m}$ と曲線の接線の方向が一致するように配置するものとする.

線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_\mathrm{a}$ に対応するソレノイドの電流密度分布は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = (-C_\mathrm{a}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_\mathrm{a} \times \boldsymbol{\nabla})\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{a}) \tag{3}$$

である. $C_\mathrm{a} = \kappa_\mathrm{a} m \overset{\mathrm{D}}{\sim} \mathrm{A\,m}$ は長さあたりの磁気モーメントでソレノイドの強度を特徴づける量である[1]. $\boldsymbol{m} \parallel \mathrm{d}\boldsymbol{l}_\mathrm{a}$ であることに注意する. $m = \boldsymbol{m}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_\mathrm{a}/|\mathrm{d}\boldsymbol{l}_\mathrm{a}|$ は $\boldsymbol{m}$ の大きさ, $\boldsymbol{r}_\mathrm{a}$ は線要素の位置を表す.

[1] $A \overset{\mathrm{D}}{\sim} B$ は A と B の次元が等しいことを表す.

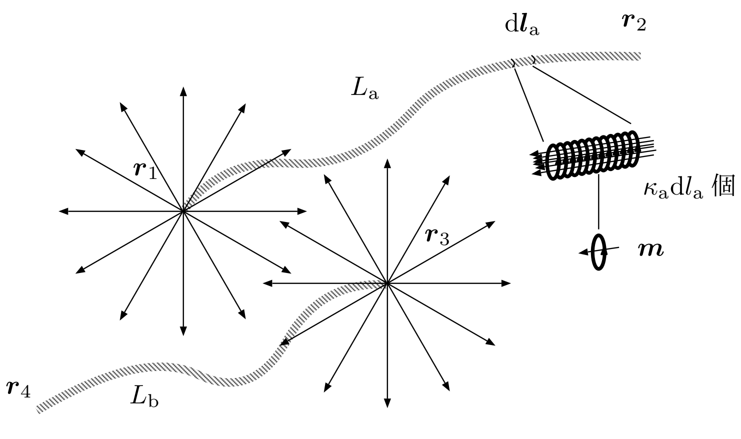

図 1: 2 つの半無限ソレノイド

3　半無限ソレノイドがつくる場

原点におかれた磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場の強さは式 (2) をビオ・サバールの法則に代入して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \int_{\text{全空間}} \mathrm{d}v' \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ &= (-\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla})\times\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}) \\ &= -(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{m}\delta^3(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{4}$$

と求められる．ここで関係

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

を用いた．ソレノイド a を構成する線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{a}}$ が作る磁場は式 (3) より

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = (C_{\mathrm{a}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}) + C_{\mathrm{a}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{a}}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}) \tag{6}$$

である．ただし，$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{a}} = \partial/\partial\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}$．これを曲線 L_{a} に沿って積分すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \int_{L_{\mathrm{a}}} \mathrm{d}\boldsymbol{H} &= C_{\mathrm{a}}\left(\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) - \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\right) \\ &+ C_{\mathrm{a}}\int_{L_{\mathrm{a}}} \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}})\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{a}} \end{aligned} \tag{7}$$

$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ は L_{a} の終点と始点である．第 2 項はソレノイド内部の磁束に相当しており，ソレノイドの外ではゼロである．L_{a} が半無限 ($\boldsymbol{r}_2 = \infty$) の場合は

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = C_{\mathrm{a}}\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) + C_{\mathrm{a}}\int_{L_{\mathrm{a}}} \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}})\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{a}} \tag{8}$$

となる．

右辺第 1 項はソレノイドの外の磁場であるが，その端点 $\boldsymbol{r}_1$ におかれた点磁荷 $g_{\mathrm{a}} = \mu_0 C_{\mathrm{a}}$ がつくる磁束密度

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -g_{\mathrm{a}}\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}) \tag{9}$$

に等しい．g_{a} の次元をチェックすると

$$g_{\mathrm{a}} = \mu_0 C_{\mathrm{a}} \overset{\mathrm{D}}{\sim} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\,\mathrm{A\,m} = \frac{\mathrm{V\,s/A}}{\mathrm{m}}\,\mathrm{A\,m} = \mathrm{V\,s} = \mathrm{Wb} \tag{10}$$

であり，正しく磁荷の次元を与えている．

ソレノイドによって内部に作られた磁束 g_{a} が端点で開放され等方的に広がっている様子と，同じ点におかれた磁荷 g_{a} がつくる磁束の様子を対比するとよい．

4　半無限ソレノイドが受ける力

原点におかれた無限小ループ電流 $\boldsymbol{m}$ が，磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ から受ける力は [1] の式 (9.36) と式 (2) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \int_{\text{全空間}} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}v \\ &= [(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla})\times\boldsymbol{B}](0) = [(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}](0) \end{aligned} \tag{11}$$

である．ただし，静磁場条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$, $\mathrm{curl}(\boldsymbol{B}/\mu_0) = 0$ を用いた．したがって，ソレノイド b を構成する線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{b}}$ が受ける力は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (C_{\mathrm{b}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{b}})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}) \tag{12}$$

ただし，$C_{\mathrm{b}} = \kappa_{\mathrm{b}} m$．これを曲線 L_{b} に沿って積分すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = \int_{L_{\mathrm{b}}} \mathrm{d}\boldsymbol{F} &= C_{\mathrm{b}}\int_{L_{\mathrm{b}}} (\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{b}})\boldsymbol{B} \\ &= C_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_3) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_4)) \end{aligned} \tag{13}$$

が得られる．$\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$ は L_{b} の終点と始点である．半無限の場合，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_4 = \infty) = 0$ を仮定すると，

$$\boldsymbol{F} = C_{\mathrm{b}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_3) = g_{\mathrm{b}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_3) \tag{14}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{H} = \mu_0^{-1}\boldsymbol{B}$．これは点 $\boldsymbol{r}_3$ におかれた点磁荷 $g_{\mathrm{b}} = \mu_0 C_{\mathrm{b}}$ が受ける力に等しい．

ソレノイド全体が受ける力であるにも拘らず，端点 $\boldsymbol{r}_3$ での磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_3)$ だけで表せていることに注意する．これはソレノイドの各部分が磁場の勾配に比例する力を受けているためである．

5　半無限ソレノイド間のクーロンの法則

上の結果を総合して, ソレノイド a が作る磁場 (8) によってソレノイド b が受ける力 (14) を計算しよう.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{ba}} &= C_{\mathrm{b}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_3) = C_{\mathrm{b}}\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_3) \\ &= \mu_0 C_{\mathrm{b}} C_{\mathrm{a}} \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\end{aligned} \tag{15}$$

と表すことができる. これは大きさ g_{a}, g_{b} の磁気単極に対するクーロンの法則

$$\boldsymbol{F}_{31} = \frac{g_{\mathrm{a}} g_{\mathrm{b}}}{\mu_0}\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) \tag{16}$$

に対応している.

これら 2 つの式は類似しているが, 前者は電流間の力, 後者は磁荷間の力である. 磁荷間の力は電荷間の力との対応が考えやすい. 一方, 半無限ソレノイドの電流の間の力がこのような簡単な形になることは想像しがたく, 導出にも少し手間がかかるので提示されることは希である.

永久磁石や鉄芯入りの電磁石を扱う場合には磁荷の集合としての磁極を導入することが一般的である. その際，磁荷間の力として式 (16) が天下りに与えられることも多い. しかし, 電磁気の体系の中には磁荷といったものは存在しないので無理のある説明方法である.

式 (15) の存在を知っていれば, 磁極や磁荷を「廃棄する」ことにそれほど抵抗を覚えずに済むのではないだろうか.

6　補足

ソレノイド a が作る磁場とソレノイド b がそれから受ける力の 2 段階に分けて求めたが, それぞれを構成する無限小ループ電流間の力の総和として式 (15) を求めることも可能である. また, ソレノイドが有限の場合を考えることも容易である. すなわち,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{ba}} &= \mu_0 C_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{b}} \int_{L_{\mathrm{b}}}\int_{L_{\mathrm{a}}} (\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{b}})(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}) \\ &= \mu_0 C_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{b}}\left(G_1(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) - G_1(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1)\right. \\ &\qquad \left. - G_1(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) + G_1(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_2)\right)\end{aligned} \tag{17}$$

参考文献

[1] 北野正雄: 「マクスウェル方程式 — 電磁気学のよりよい理解のために」(サイエンス社)