# 電磁気学におけるパリティについて

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2010 年 6 月 22 日

## 1 はじめに

今井功著「古典物理の数理」[1] における電磁気に関する議論はユニークで示唆に溢れており, 同じ著者によるテキスト [2] とともに, 電磁気学の基礎を見直す上で貴重な文献である.

しかし, 文献 [1] における電磁量のパリティに関する議論は, 一般的なものとの不整合が目立ち, 混乱を与えている. それは, パリティによる分類に関する同書 80 ページの表 (表 1 として再掲) と, 電磁気の標準的な教科書 [3] の表 6.1 を比較すれば明らかである. 前者では, 電場 $\boldsymbol{E}$, 電束密度 $\boldsymbol{D}$ のパリティをそれぞれ $+1$, $-1$ としているのに対し, 後者では両方ともを $-1$ としている.

本稿は, 文献 [1] の 2.4 節 (i) を逐次見直しながら, 標準的なパリティの考え方との対応をつけることを目指している[1].

## 2 準備

空間反転に対する偶奇性 (パリティ) に関する議論はかなり複雑である[2]. その理由は, パリティを決定する要因が 2 つあるからである. パリティは, 「対象となる量の, テンソルとしての階数」と, 「通常のテンソルと擬テンソル」のちがい (擬性 (psuedoness) とよぶ) によって決定される. さらに, テンソルや微分形式を用いない, スカラー, ベクトルのみによる通常の記述が, パリティの議論にはあまり適していないことも混乱の原因である.

**テンソルの階数**　電磁気学に登場する主要な量は 0 階から 3 階のテンソルに分別される. 0 階のテンソルはスカラー, 1 階のテンソルはベクトルである. 通常, 2 階と 3 階のテンソルは後にのべるホッジ双対の関係をもちいて, それぞれベクトル, スカラーに変換される. テンソルの階数を $n$ で表すことにする.

**擬テンソル**　テンソルの成分は座標系の変換に対して, その階数にしたがって変換をうけるが, テンソル自体は座標系には依存しない対象物である. しかし, 座標系の掌性 (右手系, 左手系のちがい) によって, それ自体の符号が変化する擬テンソル (pseudo tensor) というものがある. 捻れたテンソル (twisted tensor) ともよばれる.

たとえば, 3 階の完全反対称テンソル $\epsilon_{ijk}$ は実は擬テンソルである. ここでは擬性 $p$ というパラメータを導入し, 通常のテンソルに $p=0$, 擬テンソルに $p=1$ を割り当てることにする. 擬テンソルを含む一般のテンソルはその階数 $n$ と擬性 $p$ によって特徴づけることができる.

[1]本稿の著者も [1] を参考に書かれた論文 [4] を読む機会があり, おおいに混乱したので, 考えを整理する目的で筆をとった.

[2]電磁気のテキストにおいて空間反転対称性 (偶奇性) が議論されることは少ない. せいぜい, 極性ベクトル, 軸性ベクトルの区別が現象論的に導入される程度に終わっている. 文献 [3] においても, その扱いは表面的である. [1] は注意深い考察で本質に迫っている. テンソルを用いた詳しい議論は [5] の第 16 章にある.

**受動変換と能動変換**　回転や空間反転のような変換を扱う場合, 受動変換, 能動変換とよばれる, 2 通りの考え方がある. 受動変換では対象であるテンソルを固定し, 座標系を変化させる. その結果, テンソルの成分が変換を受ける. 逆に能動変換では対象そのものを変化させる. 能動変換は, 成分を固定して, 座標を変化させることで実現される.

擬テンソルを含む一般のテンソルの空間反転に関する変換則, すなわちパリティは次のとおりである. 受動変換では, 対象は $(-1)^p$, 成分は $(-1)^{n+p}$ のように, 能動変換では, 対象も成分も $(-1)^{n+p}$ のように符号変化を受ける.

**ホッジ双対**　通常, 高階のテンソルの出現を避けるために, 2 階, 3 階の (反対称) テンソルをそれぞれベクトルとスカラーに対応づけることが暗黙のうちに行われている. たとえば, 磁束密度の本来の姿は 2 階の反対称テンソル $\mathsf{B}$ であるが, ホッジ作用素 '$*$' によって, ベクトル $\boldsymbol{B} = *\mathsf{B}$ に対応させたものを用いている. ホッジ作用素は擬性の変化を伴うので, $\mathsf{B}$ は通常のテンソルであるが, $\boldsymbol{B}$ は擬ベクトルである. (3 次元空間における) ホッジ作用素はテンソルの階数を $n' = 3 - n$ に変化させるとともに, 擬性を $p' = 1 - p$ のように反転させる. その結果, パリティ $(-1)^{(n+p)}$ は変化しないことに注意する.

## 3　「古典物理の数理」におけるパリティの扱い

それでは, 文献 [1] の 27 ページ, **(i) 極性ベクトルと軸性ベクトル, パリティ** の部分を引用しながら, 注釈を加えてゆく. 結論的にいえば, ここでパリティとよばれているものは, 実は擬性に由来する $(-1)^p$ であり, 通常パリティと考えられている $(-1)^{(n+p)}$ とは異なっている. [1] では, 擬性のみに焦点を絞って議論を進めている. そこで, 以後の議論では一般的なパリティと区別するために, 擬パリティとよぶことにする[3]. また, 紛らわしい場合には, 通常のパリティを全パリティとよんで区別することにする. 以下の引用文においても, 混乱を避ける意味で必要に応じて, パリティを (擬) パリティと置き換えることにする. ただし, この置き換えを行っても, いくつかの錯誤が残っている. 以下, 段下げの部分が [1] からの引用である.

> (文献 [1] 27 ページ)
> O を原点とする 2 つの直角座標系 $S(x, y, z)$, $S'(x', y', z')$ を考える. これらの系の基底ベクトルをそれぞれ $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ とすると, 位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}$ は
>
> $$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$
>
> のように表される. さて, 両系の座標軸が正反対の方向をもつとき, S 系から S′ 系への座標変換を**反転** (inversion) という. このとき, $x'_i = -x_i$, $\boldsymbol{e}'_i = -\boldsymbol{e}_i$, すなわち
>
> $$x' = -x, y' = -y, z' = -z; \boldsymbol{i}' = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$$
>
> の関係が成り立つ. したがって, 反転に際して, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の座標は '大きさ' を保ち, 符号を変える. 反転に対して位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と同様にふるまう, すなわち座標成分が符号を変えるベクトルを**極性ベクトル** (polar vector) という. たとえば, 速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ は極性ベクトルである.

ここでは受動変換の考え方が使われている. 「受動変換において成分の符号が変化するベクトル」を極性ベクトルと定義している. ベクトル $(n = 1)$ の受動変換に際しての成分の変換は $(-1)^{n+p} = (-1)^{p+1}$ であるので, $p = 0$, すなわち擬でないベクトルが極性ベクトルである.

> いま 2 つの極性ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ のベクトル積 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を考える. 式 (1.35) により, これは $\boldsymbol{C} = \epsilon_{ijk} A_i B_j \boldsymbol{e}_k$ と書き表される. S 系から S′ 系に移ると $A_i = -A'_i$, $B_j = -B'_j$, $\boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}'_k$ であるから,
>
> $$\boldsymbol{C} = \epsilon_{ijk} A_i B_j \boldsymbol{e}_k = -\epsilon_{ijk} A'_i B'_j \boldsymbol{e}'_k = -\boldsymbol{C}'$$

[3] 擬性に起因するパリティ, あるいは擬性のパリティへの寄与, といった意味である.

となる．$\boldsymbol{C}'$ は S′ 系での $\boldsymbol{C}$ に相当するベクトルである．すなわち, $\boldsymbol{C}$ は反転に際して符号を変える．一般に反転に際して符号を変えるベクトルを**軸性ベクトル** (axial vector) あるいは **擬ベクトル** (pseudovector) という．容易にわかるとおり, 軸性ベクトルの座標成分は, 反転に対して符号を変えない.

ここでも基本的に受動変換の考え方が用いられている．ベクトル自体の受動変換に際しての変換則は $(-1)^p$ であるので, $p=1$, すなわち擬ベクトルが軸性ベクトルである．成分の変換則は $(-1)^{n+p}=(-1)^2=1$ であり, 符号を変えない.

擬性の原因は $\epsilon_{ijk}$ にある．これは, 3 階のテンソルの成分であるので, 本来, 座標系の反転に伴って符号を変えるべきところ, そうはなっていない．すなわち, $\epsilon_{ijk}$ を成分としてもつテンソルが擬テンソルになっているのである．本質的に $\epsilon_{ijk}$ を奇数個含む量は擬量である.

ベクトル積の操作はテンソル的には, 反対称積 '$\wedge$' を用いて $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=*(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})$ で与えられ, ホッジ作用素 '$*$' のために, 擬性は変化する．一方, スカラー積の操作は, 擬性を変えない.

簡単のために, 反転に対して符号を変えないか, 変えるかに応じて, その量の (擬) **パリティ** ((擬) **偶奇性**) はそれぞれ $+1$, $-1$ であるということにしよう．そうすれば, いくつかの量の積の (擬) パリティは, もちろん, 各量の (擬) パリティの積に等しい．極性ベクトルの (擬) パリティは $+1$, 軸性ベクトルの (擬) パリティは $-1$ である.

擬パリティを $(-1)^p$ で定義していることになる.

上でみたように, 2 つの極性ベクトルのベクトル積は軸性ベクトルである．すなわち, ベクトル積は (擬) パリティを変える, つまり (擬) パリティ $-1$ の働きをする．ベクトル微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{i}\partial/\partial x+\boldsymbol{j}\partial/\partial y+\boldsymbol{k}\partial/\partial z$ はその座標成分のパリティが $-1$ だから, $\boldsymbol{\nabla}$ 自身の (擬) パリティは $+1$ である．したがって, $\mathrm{div}=\boldsymbol{\nabla}\cdot$ および $\mathrm{rot}=\boldsymbol{\nabla}\times$ の (擬) パリティはそれぞれ $+1$, $-1$ である.

$\boldsymbol{\nabla}$ は通常のベクトル (極性ベクトル) だと考えられるので, $p=0$ である.

体積要素 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ の (擬) パリティは $-1$ である．微小ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$ を 2 辺とする平行四辺形のかたちの面積要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$ の (擬) パリティも $-1$ である．任意の形の体積要素 $\mathrm{d}V$, 面積要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ についても事情は同じで, ともに (擬) パリティは $-1$ である．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ で定義されるから, (擬) パリティは $-1$, したがって軸性ベクトルである.

**(ii) 保存量の (擬) パリティ**

物理学では普通 '保存量' $Q$ とその '流れ' $\boldsymbol{q}$ について考察する．そして数理的な取扱いのために, '体積密度' $\rho$ が導入される．つぎに, これらの量の (擬) パリティを考えてみよう.

まず, $\rho\mathrm{d}V$ が $Q$ と同じ (擬) パリティを持つことは明らかである．保存法則を数式的に表現する (2.13) によれば, $q(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$ は $\rho\mathrm{d}V$ と同じ (擬) パリティをもつ．ところが, (2.17) により, $q(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ と書けるから, $\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は $\rho\mathrm{d}V$ と同じ (擬) パリティをもつ．$\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の (擬) パリティはともに $-1$ であるから, けっきょく, つぎの定理が得られる.

**定理 2.1** 保存量 $Q$ の '体積密度' $\rho$ および '流れ' $\boldsymbol{q}$ は $Q$ と逆の (擬) パリティをもつ.

このあたりからやや混乱がある．$\mathrm{d}Q=\rho\mathrm{d}V$ を体積 $\mathrm{d}V$ 内の電荷と考えた場合, その符号は座標の向きづけと体積 $\mathrm{d}V$ の向きの関係で決まる．たとえば, 正の電荷のみ分布している場合でも, $\mathrm{d}V$ の向きが, 現在の座標系において負であれば, $\mathrm{d}Q$ は負になる[4]．つまり, $\mathrm{d}Q$ は擬である．$\mathrm{d}V$ も座標系の向きづけ依存した符号をもつので擬であって, その結果, $\rho$ は擬ではない量である．入れ物である $\mathrm{d}V$ を指定しない電荷そ

[4] やや奇異に感じられるかも知れないが, 1 次元において, 積分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ は常に $f(x)>0$ であっても, $a>b$ ならば負になる．このように符号を定めないと, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=0$ が成り立たなくなる.

表 1: 文献 [1] 80 ページの表を再掲. 修正が必要である. 特に, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\varepsilon_0$, $\mu_0$, $\rho$, $U$ の分類に問題がある. これらはいずれも $\boldsymbol{J}$ の擬パリティを $+1$ にとったことに原因がある.

| | |
|---|---|
| スカラー | $q$ |
| 擬スカラー | $\rho$, $U$; $\varepsilon_0$, $\mu_0$ |
| 極性ベクトル | $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ |
| 軸性ベクトル | $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{J}$; $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{S}$ |
| テンソル (パリティは $-1$) | $T_{ik}$ |

のものは擬でない量である. このように, 一般の保存量とその体積密度量の擬性は一致する. 次に, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を通過する電流 $\mathrm{d}I = \boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を考える. 座標系の向きづけによって, $\mathrm{d}I$, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は符号を変える. よって, $\boldsymbol{q}\,(=\boldsymbol{J})$ は擬ではない.

定理 2.1 は次のように修正される. 「保存量 $Q$ の '体積密度' $\rho$ および '流れ' $\boldsymbol{q}$ はいずれも $Q$ と同じ擬パリティをもつ.」

> (擬) パリティが $-1$ のスカラーは**擬スカラー** (pseudoscalar) とよばれる. 真のスカラーである質量や電荷に対して, (質量) **密度** $\rho$ や**電荷密度** $\rho_e$ は擬スカラーである. また, その**流量** $\rho\boldsymbol{v}$ や**電流密度** $\boldsymbol{J}$ の (擬) パリティは $-1$ で, 擬ベクトル, すなわち軸性ベクトルである.

ここにも修正が必要である. 質量密度 $\rho$ や電荷密度 $\rho_e$ は通常のスカラーである. また, その流量 $\rho\boldsymbol{v}$ や電流密度 $\boldsymbol{J}$ の擬パリティは $+1$, すなわち極性ベクトルである.

> 物理学で現れる方程式についてつぎの標語を記憶されるようおすすめしたい.
> **標語**　物理量に関する方程式の各項は, 次元のみならず (擬) パリティがすべて一致しなければならない.
>
> 数式的な計算をするばあいなど, 実際上は, (擬) パリティを忘れても不都合を生じることはない. たとえば扱っているベクトルが極性ベクトルであるか軸性ベクトルであるかを区別する必要はない. しかし, 方程式そのものを正確におぼえるには, 上の標語が役に立つ.

この部分は全くそのとおりである. 擬パリティだけでなく, 全パリティについても同様のことがいえる.

> たとえば, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ の形で現れる $\boldsymbol{A}$ は極性ベクトル, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}$ の形で現れる $\boldsymbol{B}$ は軸性ベクトル, $\cdots$ などである.

この部分は残念ながら誤解がある. rot, div の適用はベクトルの擬性や全パリティには直接関係なく, 本来の姿としてのテンソル (あるいは擬テンソル) の階数 $n$ で決定される. すなわち, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ の形で現れる $\boldsymbol{A}$ は 1 階のテンソル (1 形式) に, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}$ の形で現れる $\boldsymbol{B} = *B$ は 2 階のテンソル (2 形式) に由来するものである.

表 1 に示した, 文献 [1] の表は修正しなければならない. 各量のテンソル性も配慮しながら, 再分類を行う. すでに見たように, $\rho$, $\boldsymbol{J}$ は擬ではない. マクスウェル方程式を用いると, $\boldsymbol{D}$ は非擬, $\boldsymbol{H}$ は擬であることが分かる. 一方, ローレンツ力の式 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{v}$ の非擬性から, $\boldsymbol{E}$ が非擬, $\boldsymbol{B}$ が擬であることが分かる. $\varepsilon_0$, $\mu_0$ が非擬性や, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{g}$ の擬性もこれらから導くことができる. 表 2 に結果を示す.

## 4　擬量の意味

擬量の意味と必然性を空間 1 次元, 2 次元の場合を例に考えてゆこう.

表 2: テンソルの階数を考慮した擬性とパリティ. $(n, p)$ は本来のテンソルとしての階数と擬性, $(n', p')$ はスカラ/ベクトル化した場合の階数と擬性を表している. スカラ/ベクトル化に際してテンソルの階数が変化した場合は, 擬性も変化するが, 全パリティ $(-1)^{(n+p)}$ は変化しないことに注意する.

| 微分形式 | $(n,p)$ | スカラー/ベクトル | $(n',p')$ | 全パリティ $(-1)^{(n+p)}$ | 擬パリティ $(-1)^{p'}$ | 例 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 形式 | $(0,0)$ | スカラー | $(0,0)$ | $+1$ | $+1$ | $q$, $\varepsilon_0$, $\mu_0$ |
| 擬 3 形式 | $(3,1)$ | スカラー | $(0,0)$ | $+1$ | $+1$ | $\rho$, $U$ |
| 3 形式 | $(3,0)$ | 擬スカラー | $(0,1)$ | $-1$ | $-1$ | $-$ |
| 擬 0 形式 | $(0,1)$ | 擬スカラー | $(0,1)$ | $-1$ | $-1$ | $-$ |
| 1 形式 | $(1,0)$ | 極性ベクトル | $(1,0)$ | $-1$ | $+1$ | $\boldsymbol{E}$ |
| 擬 2 形式 | $(2,1)$ | 極性ベクトル | $(1,0)$ | $-1$ | $+1$ | $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{g}$ |
| 2 形式 | $(2,0)$ | 軸性ベクトル | $(1,1)$ | $+1$ | $-1$ | $\boldsymbol{B}$ |
| 擬 1 形式 | $(1,1)$ | 軸性ベクトル | $(1,1)$ | $+1$ | $-1$ | $\boldsymbol{H}$ |

### 4.1 1 次元の場合

まず符号に関する議論を簡単化するために質量の分布を考える. 1 次元 (質量) 密度を $\rho(x)$ と表す. 単位は kg/m である.

3 つの点 $A$, $B$, $C$ がこの順に並んでいるとする. 座標系 $\Sigma$ に対するこれらの点の座標を $a$, $b$, $c$ と表す. 座標系 $\Sigma'$ に対しても $a'$, $b'$, $c'$ と表す.

区間をその端点 $A$, $B$ を用いて $(A \to B)$ で表す. 区間上の質量は $M(A \to B) = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$ で与えられる. 質量は正なので, 全領域で $\rho(x) \geq 0$ を仮定する. 通常の積分の性質から, $M(A \to B) = M(A \to C) + M(C \to B)$, すなわち $\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x = \int_a^c \rho(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \rho(x)\mathrm{d}x$ が成り立つ. 大小関係 $a < b < c$ が成り立つ場合, $M(C \to B)$ は負となる. 正であるべき質量のみの分布から負の質量が出てくる理由は何であろう. $A$ から $C$ まで数え集めた質量を, こんどは $C$ から $B$ まで数え戻すことで, $A$ から $B$ までの質量の総和を求めていることになる. このように正の質量を「戻す」という操作を許すために, もともと存在しえない負の質量が導入されているのである. (金銭の場合でも貸借計算を容易にするために負の貨幣価値が導入されていることを思いだそう.)

$A$ から $B$ へ向かう方向が座標系 $\Sigma$ の座標 $x$ が増加する方向であるとする. すなわち, $a < b$. 一方, 座標系 $\Sigma'$ は逆の向きをもち, 座標 $x'$ は減少するとする. すなわち, $a' > b'$. この場合, 質量は座標系に応じて

$$M(A \to B) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x & (\Sigma) \\ \displaystyle\int_{a'}^{b'} \rho(x')(-\mathrm{d}x') = \int_{a'}^{b'} \rho'(x')\mathrm{d}x' & (\Sigma') \end{cases}$$

前者の座標系を選んだ場合は, $\rho$ をそのまま積分し, 正の質量を得る. 後者を選んだ場合には, $\rho'(x') = -\rho(x)$ を積分し, 負の質量を得る. 質量分布に関しては, このように積分区間の方向と座標系の向きの関係に応じて符号を調整することが必要とされる. これは, 1 次元における質量密度の擬性を表している. 電荷の場合は正電荷の密度 $\rho_{\mathrm{e}+}(x)$, 負電荷の密度 $\rho_{\mathrm{e}-}(x)$ を同様に考えたのち, 全電荷分布 $\rho_{\mathrm{e}} = \rho_{\mathrm{e}+} - \rho_{\mathrm{e}-}$ を導入すればよい.

一方, 1 次元の電場を考える. 簡単のために, $E = \mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ であるとしよう. 座標系ごとに積分を考えると

$$V(A \to B) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b E(x)\mathrm{d}x & (\Sigma) \\ \displaystyle\int_{a'}^{b'} (-E(x'))(-\mathrm{d}x') = \int_{a'}^{b'} E(x')\mathrm{d}x' = \int_{a'}^{b'} E'(x')\mathrm{d}x' & (\Sigma') \end{cases}$$

$\mathrm{d}V/\mathrm{d}x = \mathrm{d}V/\mathrm{d}x'$ を用いた. 電場の場合には, それ自身が空間方向に向きを持っており, 積分の符号は区間の方向との関連で定めればよく, 座標系に向きづけは考慮しなくてよいのである. すなわち, $E'(x') = E(x)$ である. これは, 1 次元における電場の非擬性を表している.

### 4.2　2 次元の場合

2 次元の場合も座標系は向きづけ (掌系) によって 2 つのクラスに分類できる. たとえば, $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が一方のクラスに属している場合, $\Sigma' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\} = \{\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2\}$ は他方のクラスに属する.

3 次元における曲面に相当するものは, 曲線である. 曲線は 3 次元の場合の "面" と "線" の 2 つの役割を担っている. 曲線の一部分である長さ $\mathrm{d}L\,(>0)$ の微小要素を考える. 微小要素を "線" 要素とみる場合には, 接線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を用いて $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{t}\mathrm{d}L$, "面" 要素とみなす場合には, 法線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}L$ によって特徴づけるのが適当である. $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{n}$ は直交しているが, 向きに関する自由度が残っている. そこで, 順序対 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ が座標系の向きづけと一致するようにとるのが自然である. つまり, 変換行列式

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_2) \end{vmatrix} = \pm 1$$

の値のうち, +1 をとる. 今, $\boldsymbol{t}$ を固定すると, $\Sigma$ 系での $\boldsymbol{n}$ と $\Sigma'$ 系での $\boldsymbol{n}'$ は $\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n}$ という関係にある. 面要素ベクトルも $\mathrm{d}\boldsymbol{S}' = -\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ のように座標系の向きづけの影響を受ける.

まず, 線積分の例を見る. 湖の水面の高さ分布 $h$ を考える (川の流れや風の影響を受けて水平面からずれている). 勾配を表す 2 次元ベクトルを $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\nabla} h$ とすると, その定義から, (座標系の向きづけによらず) 高さの増加する方向を向く. したがって, $\mathrm{d}h = \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は, 微小な変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ に伴う高さの増加を与える. 曲線 $L = (A \to B)$ に沿った積分 $h(A \to B) = \int_L \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ も高さの変化を与える. これらは, 座標系の向きづけには依らない.

さて, "面" 積分の例を示す. 2 次元の水流を考える. 水の面密度を $\rho \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{kg/m^2}$, 速度を $\boldsymbol{v}$ とすると, 質量流密度は $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v} \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{kg/(s\,m)}$ で与えられる. $\boldsymbol{J}$ が座標系の向きづけには依存しないことは明らかである. $\mathrm{d}I = \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{kg/s}$ は, 微小な "面" を横切る質量流を与える.

これを積分して有限の大きさの "面" $L$ (実際は線) を横切る質量流を求めるに際して, $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ の向きを考慮する必要がある. $L = (A \to B)$ を, 微小な線要素 $\Delta\boldsymbol{l}_i$ に分割するのだが, 各微小ベクトルの方向は当然 $A$ から $B$ に向かう方向にとられる. 次に座標系の向きづけを考慮して $\Delta\boldsymbol{S}_i$ を定め, $\boldsymbol{J}_i \cdot \Delta\boldsymbol{S}_i$ を計算し, 総和 (と極限) をとった結果が $I(A \to B) = \int_L \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ である. このような符号に対する配慮の結果, $I(B \to A) = -I(A \to B)$ という性質が満たされる. なお, 座標系の向きづけが逆の場合には $\Delta\boldsymbol{S}'_i = -\Delta\boldsymbol{S}_i$ となるので, $I'(A \to B) = -I(A \to B)$ となることに注意しなければならない.

## 参考文献


[1] 今井功: 「古典物理の数理」(岩波書店, 2003)

[2] 今井功: 「電磁気学をかんがえる」(サイエンス社, 1990)

[3] J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 3rd ed. (Wiley, 1998)

[4] 市口恒雄: 電磁気学における混乱と CPT 対称性の意義, 科学技術動向 2009 年 6 月号

[5] 北野正雄: 「新版 マクスウェル方程式 — 電磁気学のよりよい理解のために」(サイエンス社, 2009)

[6] L. シュワルツ (小島順 訳): 「解析学 5 外微分」(東京図書, 1971)