弱測定と幾何学的位相

北 野　正 雄

1　はじめに

1988 年, Aharonov らによって提唱された**弱測定** [1] が最近再び関心を集めている．当初は「どのようにスピン 1/2 粒子の成分の測定結果が 100 になりうるか」といったセンセーショナルなタイトルであったことなどから, 際物として受け止める向きもあったが, 概念としての有用性が次第に認識されるようになってきた．また, 光のスピンホール効果などの微弱な相互作用の検出に弱測定が適用できることが実験的に示されたことなどから [2], 次第に注目を浴びるようになってきた．波動関数の測定という, 従来の視点からは否定的にとらえられがちな実験も, 弱測定を利用して行われている [3]．本稿では, 弱測定やその結果である**弱値**が, 標準的な量子論の枠組に自然に収まる有用な概念であることを示したい．また, 弱測定が量子状態の位相, とくに幾何学的位相と深い関係があることを示す [4].

[1]

2　偏光の弱測定

まず, 弱測定の概要を知るための最も簡単な例として偏光測定の場合を見ておく．水平偏光, 垂直偏光の基底をそれぞれ $|\mathsf{H}\rangle$, $|\mathsf{V}\rangle$ で表すと, +45° 偏光, −45° 偏光 はそれぞれ

$$|\mathsf{D}\rangle = \frac{|\mathsf{H}\rangle + |\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\mathsf{X}\rangle = \frac{|\mathsf{H}\rangle - |\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

である．(1 次元的) ビーム形状が (複素) 振幅 $\psi(x)$ で表される +45° 偏光ビームは $|\psi_0\rangle = \psi(x)|\mathsf{D}\rangle$ と書くことができる．このビームが複屈折媒質でできたプリズムを通過すると, $|\mathsf{H}\rangle$, $|\mathsf{V}\rangle$ に対する屈折角の違いから, 水平偏光成分は $+\epsilon$, 垂直偏光成分は $-\epsilon$ だけビームがずれる．すなわち,

$$|\psi_1\rangle = \frac{\psi(x-\epsilon)|\mathsf{H}\rangle + \psi(x+\epsilon)|\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

ずれの大きさ $|\epsilon|$ はビームの幅に比べて十分小さいとする (測定の弱さ)．このビームを $|\mathsf{X}\rangle$ に近い偏光

$$|\mathsf{X}_\delta\rangle = \frac{(1+\delta)|\mathsf{H}\rangle - (1-\delta)|\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\delta| \ll 1 \tag{3}$$

に対応する偏光板を通過させる (**事後選択**). $\langle\mathsf{D}|\mathsf{X}_\delta\rangle = \delta$ である．すると, ビームの形状は

$$\begin{aligned}\langle\mathsf{X}_\delta|\psi_1\rangle &= \tfrac{1}{2}[(1+\delta)\psi(x-\epsilon) - (1-\delta)\psi(x+\epsilon)] \\ &\sim \delta\left[1 - \frac{\epsilon}{\delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\psi(x) \sim \delta\psi(x-\epsilon/\delta)\end{aligned} \tag{4}$$

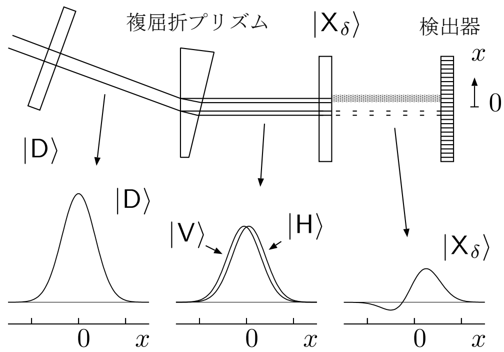

図 1: 偏光の弱測定

[1]北野正雄 「弱測定と幾何学的位相」 数理科学 Vol. 50-3 (No. 585) pp. 7–13 (サイエンス社, 2012) の著者最終稿

のように変化する．意外にも，ビームのずれ，すなわち複屈折の効果が $1/\delta$ 倍に増幅されている．通常，複屈折の効果 ϵ は 2 つのビームが完全に分離する程度に大きくなるようにして測定される．しかし，弱測定の方法ではビームが分離しない状態でも，事後選択を行うことで，効果が「増幅」され，測定が可能となるのである．ただし，ビームの振幅が δ 倍に小さくなっていることに注意する．(したがって，測定の精度向上に役立つかどうかは状況による.) ここで測定対象となったのは複屈折の程度であるが，利用された演算子は $\hat{A} = |\mathsf{H}\rangle\langle\mathsf{H}| - |\mathsf{V}\rangle\langle\mathsf{V}|$ と表すことができる．後に示すように，この場合，$\langle\hat{A}\rangle_\mathrm{w} = \langle\mathsf{X}_\delta|\hat{A}|\mathsf{D}\rangle/\langle\mathsf{X}_\delta|\mathsf{D}\rangle = 1/\delta$ が弱値に相当し，$\hat{A}$ の固有値である ±1 の範囲外の値になりうる [1].

3 弱測定の理論

一般の弱測定は図 2 のような手順にしたがって行われる．多数の量子系のアンサンブルを用意し，各系に対して以下の手順を逐次行う．まず，時刻 t_i に事前選択のための射影測定 $\hat{P}_\mathrm{i} = |\,\mathsf{i}\,\rangle\langle\,\mathsf{i}\,|$ を行う．結果は “1” または “0” であるが，“1” であった場合のみ，次に進む．系の状態は $|\,\mathsf{i}\,\rangle$ になっている．時刻 t_m $(\geq t_\mathrm{i})$ に，物理量 $\hat{A}$ に関する測定を行う．$\hat{A}$ のスペクトル分解を $\hat{A} = \sum_k a_k|\mathsf{m}_k\rangle\langle\mathsf{m}_k|$ と書いておく．もし，射影測定を行うと，測定結果として固有値のどれか，たとえば a_k が得られて，系は対応する固有状態 $|\mathsf{m}_k\rangle$ に変化する．アンサンブルに対して，測定結果を平均すると $\langle\hat{A}\rangle = \langle\,\mathsf{i}\,|\hat{A}|\,\mathsf{i}\,\rangle$ が得られることはよく知られている．

しかし，ここでは系を外部のプローブ系と弱く相互作用させ，系の持つ $\hat{A}$ に関する情報を部分的に移すにとどめて，もとの状態をほとんど保持するようにする．相互作用の程度を ϵ で表す．相互作用の後に，プローブ系に対して適当な射影測定を行うことで測定結果を得る．(いわゆる**間接測定**であるが，詳細は後に述べる.) 得られた値はとりあえず記録しておく．次に，時刻 t_f $(\geq t_\mathrm{m})$ に事後選択のための射影測定 $\hat{P}_\mathrm{f} = |\,\mathsf{f}\,\rangle\langle\,\mathsf{f}\,|$ を行う．再び結果は “0” または “1” であるが，“0” の場合は先ほどの記録を破棄し，“1” であった場合は保持する．時間を遡って，

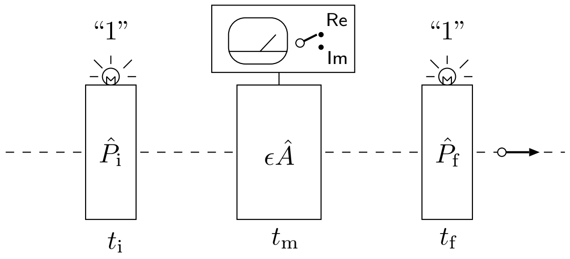

図 2: 弱測定のための手続き

測定結果を選別するのが「事後」選択と呼ばれるゆえんである．アンサンブル全体について上記の操作を繰り返した後，保持されたデータのみの平均をとると，弱値

$$\langle\hat{A}\rangle_\mathrm{w} = \frac{\langle\,\mathsf{f}\,|\hat{A}|\,\mathsf{i}\,\rangle}{\langle\,\mathsf{f}\,|\,\mathsf{i}\,\rangle} \tag{5}$$

に比例した値が得られる．

次に，プローブ系を用いた間接測定によって弱値が得られる様子を調べる．被測定系は離散スペクトル，測定器 (プローブ) は 2 状態系で表されるとする．(一般には，先の例におけるビームの位置 x のように連続量で表されるプローブでモデル化されることが多いが，ここでは簡単化のために 2 状態系を用いる.) プローブ系の基底を $(|0\rangle, |1\rangle)$ で表し，初期状態を $|0\rangle$ とする．被測定系の初期状態を $|\,\mathsf{i}\,\rangle$ とおく．全体系の初期状態は

$$|\varPsi_0\rangle\rangle := |\,\mathsf{i}\,\rangle|0\rangle \tag{6}$$

である．被測定物理量が $\hat{A}$ に対して，測定のためのユニタリ相互作用を

$$\hat{U} := \hat{1} - \mathrm{i}\epsilon\hat{A}\otimes\hat{\sigma}_1 \tag{7}$$

とする．ただし，$\hat{\sigma}_1 = |0\rangle\langle1| + |1\rangle\langle0|$ はプローブに関する演算子，ϵ は微小なパラメータである．($\hat{A}\otimes\hat{\sigma}_1$ に比例する相互作用ハミルトニアンで弱く結合させればよい.)

測定相互作用後の全体系の状態は

$$|\varPsi_1\rangle\rangle = \hat{U}|\varPsi_0\rangle\rangle = (\hat{1} - \mathrm{i}\epsilon\hat{A}\otimes\hat{\sigma}_1)|\,\mathsf{i}\,\rangle|0\rangle \tag{8}$$

となる．事後選択のための状態を $|\,\mathsf{f}\,\rangle$ とする．ただし，$\langle\,\mathsf{f}\,|\,\mathsf{i}\,\rangle \neq 0$．事後選択によってプローブ系の状

態は

$$
\begin{aligned}
|\phi_2\rangle &= \langle \mathsf{f}\,|\Psi_1\rangle\rangle = \langle \mathsf{f}\,|\,\mathsf{i}\,\rangle(1 - \mathrm{i}\epsilon\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}\hat{\sigma}_1)|0\rangle \\
&= \langle \mathsf{f}\,|\,\mathsf{i}\,\rangle(|0\rangle - \mathrm{i}\epsilon\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}|1\rangle)
\end{aligned} \tag{9}
$$

のように変化する．再規格化を行うと，

$$
|\phi_3\rangle = |\phi_2\rangle/|||\phi_2\rangle|| \sim |0\rangle - \mathrm{i}\epsilon\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}|1\rangle. \tag{10}
$$

ここで，プローブ系に対して，物理量 $\hat{R} = -|v_+\rangle\langle v_+| + |v_-\rangle\langle v_-|$, $|v_\pm\rangle = (|0\rangle \pm \mathrm{i}|1\rangle)/\sqrt{2}$ の理想測定を行うと, その期待値は

$$
\langle\hat{R}\rangle = \langle\phi_3|\hat{R}|\phi_3\rangle = 2\epsilon\,\mathrm{Re}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} \tag{11}
$$

となる．同様に, $\hat{J} = |u+\rangle\langle u_+| - |u_-\rangle\langle u_-|$, $|u_\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ について

$$
\langle\hat{J}\rangle = \langle\phi_3|\hat{J}|\phi_3\rangle = 2\epsilon\,\mathrm{Im}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} \tag{12}
$$

となる．このようにプローブの設定に応じて, 弱値 $\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}$ の実部と虚部をそれぞれ測定することが可能である. (事後選択とプローブ系の測定は後先になっても構わない.)

4　ゲージ自由度と幾何学的位相

弱値は量子状態の位相と深くかかわっている．量子系の状態は複素ベクトル $|\psi\rangle$ で表わされる．このとき，状態ベクトルには

$$
|\psi'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi\rangle \tag{13}
$$

のように位相の自由度 ϕ が残されている; これら 2 つの状態 $|\psi\rangle$，$|\psi'\rangle$ は同じ物理状態を表している．同等な状態ベクトルの集まり $\psi = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi\rangle \mid -\pi \leq \phi < \pi\}$ は**射線**とよばれる. 位相 ϕ の選択の自由度を**ゲージの自由度**とよぶ．$\langle\psi'| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\langle\psi|$ であることに注意すると, 物理量 $\hat{A}$ の期待値 $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$, や密度演算子 $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ などは, ゲージに依存しない量であることが分かる. ゲージに依存するかしないかは, 量子論において非常に重要な視点である.

位相 ϕ は任意に選べるので絶対的な意味はもたないが, 2 状態間の相対位相は物理的意味を持っている．異なる 2 状態 $|\psi_1\rangle$，$|\psi_2\rangle$ の間の相対位相 $\Phi := \arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ はゲージに依存する量である．実際，$|\psi_1'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}|\psi_1\rangle$，$|\psi_2'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\psi_2\rangle$ に対し，

$$
\Phi' = \arg\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle = \Phi - \phi_1 + \phi_2 \tag{14}
$$

となり，2 つの相対位相 Φ と Φ' は一致しない.

このように, 2 つのベクトル間の相対位相はゲージに依存するため，$\phi_1 - \phi_2$ を適当に選ぶことでどんな値もとりうる. この自由度を用いて, $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ が正の実数となるよう, すなわち, $\arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ となるように調整できる. このとき，2 つのベクトル $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ は「同位相」であるといい，$|\psi_1\rangle \frown |\psi_2\rangle$ と表す.

例として, 偏光ベクトルの同位相関係を考えよう. 右回り円偏光，水平偏光，45° 偏光の 3 つの状態をそれぞれ, $|\mathsf{R}\rangle = (|\mathsf{H}\rangle + \mathrm{i}|\mathsf{V}\rangle)/\sqrt{2}$，$|\mathsf{H}\rangle$，$|\mathsf{D}\rangle = (|\mathsf{H}\rangle + |\mathsf{V}\rangle)/\sqrt{2}$ とおく．$|\mathsf{R}\rangle \frown |\mathsf{H}\rangle$, $|\mathsf{H}\rangle \frown |\mathsf{D}\rangle$ が成り立つが, $|\mathsf{D}\rangle \not\frown |\mathsf{R}\rangle$ である. そこで, 同じ円偏光を表す $|\mathsf{R}'\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}|\mathsf{R}\rangle$ を導入すると, $|\mathsf{D}\rangle \frown |\mathsf{R}'\rangle$ とすることができるが, 今度は $|\mathsf{R}'\rangle \not\frown |\mathsf{H}\rangle$ となってしまう. この例の場合, 3 つの状態を同位相でつなごうとしても, 必ずどこかに位相差 $\pi/4$ が残ってしまうのである.

一般に, 3 つの状態 (射線) できまる位相差

$$
\begin{aligned}
\gamma_3(\psi_1,\psi_2,\psi_3) &:= \arg\langle\psi_1|\psi_1'\rangle \\
&= \arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_3\rangle\langle\psi_3|\psi_1\rangle
\end{aligned} \tag{15}
$$

は**幾何学的位相**と呼ばれる [5]. ブラとケットが対で含まれているのでゲージに依存しない量である.

2 点に対する幾何学的位相は $\gamma_2(\psi_1,\psi_2) = \arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$ である．また，4 点に対するものは, $\gamma_4(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4) = \gamma_3(\psi_1,\psi_2,\psi_3) + \gamma_3(\psi_1,\psi_3,\psi_4)$ となるので, 3 点に対する幾何学的位相が本質的である. 状態を連続的につないだ経路にも同様に拡張できる.

偏光状態のような 2 状態系の場合，幾何学的位相 γ_3 は図 3 に示すポアンカレ球上の球面 3 角形の面積 Ω と対応づけることができる:

$$
\gamma_3(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = -\frac{\Omega}{2}. \tag{16}
$$

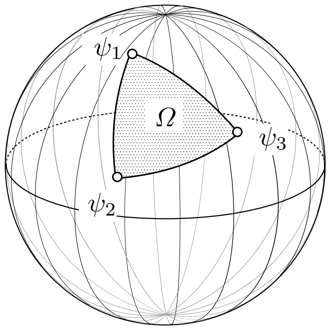

図 3: ポアンカレ球上の球面三角形

5　弱演算子 — 2 状態演算子

弱測定には, 事前選択状態 $|\mathsf{i}\rangle$ と事後選択状態 $|\mathsf{f}\rangle$ という 2 つの状態が関与している [6]. そこで, 2 つの状態によって定義される演算子を考える. すぐに思いつく $|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|$ はゲージ依存である. そこで, $\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle \neq 0$ の場合,

$$\hat{W} := \frac{|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|}{\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle} \quad (= \hat{W}_{\mathsf{if}}) \tag{17}$$

とおけば, ゲージに依存しない演算子が得られる. これを**弱演算子**とよぶ. ($\sqrt{\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}\rangle/\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle}|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|$ や射影演算子 $\hat{P}_{\mathsf{f}}$, $\hat{P}_{\mathsf{i}}$ の合成 $\hat{P}_{\mathsf{f}}\hat{P}_{\mathsf{i}} = |\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$ もゲージに依存しない. これらもそれぞれ役割を担っている.)

事前選択, 事後選択が同じものであるとき ($|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}| = |\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$) には, 密度演算子 $\hat{\rho} = |\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$ に一致する. このことから弱演算子は密度演算子の拡張であることが分かる. $\mathrm{Tr}\,\hat{W} = 1$ であることにも注意する. Tr はトレースを表す.

弱値は, $\hat{W}$ を用いて

$$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{W} = \frac{\langle\mathsf{f}|\hat{A}|\mathsf{i}\rangle}{\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle} \quad (= \langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w};\mathsf{if}}) \tag{18}$$

と表される. 物理量 $\hat{A}$, 始状態 $|\mathsf{i}\rangle$, 終状態 $|\mathsf{f}\rangle$ の 3 つによって決まる値である. 通常の期待値 $\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{\rho} = \langle\mathsf{i}|\hat{A}|\mathsf{i}\rangle$ とよく対応している. $\mathrm{Tr}\,\hat{X}^\dagger\hat{Y}$ は演算子 $\hat{X}$, $\hat{Y}$ の内積にあたる.

密度演算子 $\hat{\rho}$ と異なり, 弱演算子 $\hat{W}$ は一般にエルミートではない; $\hat{W}^\dagger \neq \hat{W}$. また, $\hat{W}$ と $\hat{W}^\dagger$ は非可換であり, $\hat{W}$ は正規 (normal) でもない. つまり, 正規直交基底で対角化できない. 一方, $\hat{W}_{\mathrm{R}} := (\hat{W} + \hat{W}^\dagger)/2$, $\hat{W}_{\mathrm{I}} := (\hat{W} - \hat{W}^\dagger)/2\mathrm{i}$ はそれぞれエルミート演算子であり, $\mathrm{Re}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{W}_{\mathrm{R}}$, $\mathrm{Im}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{W}_{\mathrm{I}}$ のように, それぞれ, 弱値の実部と虚部を与える. $\hat{W}_{\mathrm{R}}$ と $\hat{W}_{\mathrm{I}}$ は可換ではないため, 1 つのサンプルに対して, 弱値の実部と虚部を同時に測ることはできないが, サンプルが多数用意できれば, それぞれ別々に測ることができる.

密度演算子が通常のアンサンブルを特徴づけるように, 弱演算子 $\hat{W}_{\mathsf{if}}$ は, 事前選択 i と事後選択 f の両方を通過した系がつくる部分アンサンブルを表している. 比喩的にいえば, i 高校に入学し, 卒業後, f 大学に進学した高校生による仮想的なアンサンブル (大学別同窓会) を与えている. 各生徒が弱測定によって性質を問われるのは高校在学中なのであるが, 部分アンサンブルへの帰属が決まるのは卒業時である. しかし, その時点ではもはや高校生ではないので, 弱測定を課することはできない. なお, 在学期間はまちまちでもよい. また, 弱くない通常の測定を行うと, 系の持つ情報が失われ, 事後選択が意味を持たなくなるので, この部分アンサンブルは構成できなくなる.

6　弱値と複素確率測度

弱値の性質を見ておこう. 正規直交基底 $|\mathsf{m}_k\rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に対応する射影演算子 $\hat{P}_k = |\mathsf{m}_k\rangle\langle\mathsf{m}_k|$ の弱値 w_k は

$$w_k = \langle\hat{P}_k\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{P}_k\hat{W} = \frac{\langle\mathsf{m}_k|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|\mathsf{m}_k\rangle}{\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle} \tag{19}$$

である. これらは, 射影演算子による $\hat{1}$ の分解 $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \cdots + \hat{P}_n = \hat{1}$ に対応して, $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$ を満たす. 添字の部分集合 $\Delta \subset \{1, 2, \ldots, n\} =: X$ に関する射影演算子を

$$\hat{P}(\Delta) := \sum_{k\in\Delta} \hat{P}_k \tag{20}$$

のように定義する. 対応する弱値 $w(\Delta) := \langle\hat{P}(\Delta)\rangle_{\mathrm{w}}$ は複素数であり, 次の性質を満たす: (1) $w(\emptyset) = 0$,

(2) $\varDelta_1 \cap \varDelta_2 = \emptyset$ なら $w(\varDelta_1 \cup \varDelta_2) = w(\varDelta_1) + w(\varDelta_2)$,
(3) $w(X) = 1$.

このような性質は確率測度のそれに類似している．つまり, $|\mathsf{i}\rangle$ から $\{|\mathsf{m}_k\rangle \,|\, k \in \varDelta\}$ に含まれる状態のどれかを経由して $|\mathsf{f}\rangle$ へ到達する経路 $\varDelta$ をとる「確率」が $w(\varDelta)$ であると解釈できる．しかし, その「確率」が複素数値をとる点が通常の確率と異なっており, 複素確率測度とよばれるものになっている．$\hat{P}_k$ の固有値が $\{0, 1\}$ であるにもかかわらず, その弱値である $w_k = \langle \hat{P}_k \rangle_{\mathrm{w}}$ は複素数であり, その絶対値は 1 より大きくなりうる．

量子系の場合, 経路に確率を割り当てようとすると, 1 を越える値や負の値, さらには複素数を許さなければならないことを示している．Feynman は初心者向けに量子論の話をする際, 経路に割り当てられた複素数の和の重要性を強調している [7].

3 つ箱問題 [6] は負の確率の表れる典型例である．$n = 3$ の場合, $|\mathsf{i}\rangle = (|\mathsf{m}_1\rangle + |\mathsf{m}_2\rangle + |\mathsf{m}_3\rangle)/\sqrt{3}$, $|\mathsf{f}\rangle = (|\mathsf{m}_1\rangle + |\mathsf{m}_2\rangle - |\mathsf{m}_3\rangle)/\sqrt{3}$ とすると, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = -1$ となる．さらに, $w(\{1, 2\}) = 2$, $w(\{2, 3\}) = 0$, $w(\{3, 1\}) = 0$, $w(\{1, 2, 3\}) = 1$ である．これはパラドックスとして提示されたものであるが, 通常の確率としてではなく, 弱値として解釈すれば納得しやすいし, 実際に測定することもできる．

ところで, 部分アンサンブル $\hat{W}_{\mathsf{if}}$ に対して, 経路 $|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$, $|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$ の弱値が $\langle |\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}| \rangle_{\mathrm{w}} = \langle |\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}| \rangle_{\mathrm{w}} = 1$ であることは簡単に確かめられる．この部分アンサンブルに属する系は, その事前選択と事後選択にはさまれた期間において, 確実に状態 $|\mathsf{i}\rangle$ にあったとも, 確実に状態 $|\mathsf{f}\rangle$ にあったともいえるのである．一般に演算子 $|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$ と $|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$ は非可換なので, 両方が同時に確定値 1 をとるような通常の意味での状態 (アンサンブル) は存在しない．

7　弱値と幾何学的位相

物理量 $\hat{A}$ のスペクトル分解が $\hat{A} = \sum_k a_k \hat{P}_k$ のとき, 弱値は $\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}} = \sum_k a_k w_k$ と表せる．このように物理量の弱値の異常性 (値が大きいこと, 複素数であること) の原因は w_k の異常性に遡ることができる．さて, w_k の位相は式 (19) より

$$\begin{aligned} \arg w_k &= \arg \frac{\langle \mathsf{f}|\mathsf{m}_k\rangle\langle \mathsf{m}_k|\mathsf{i}\rangle}{\langle \mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle} \\ &= \arg \langle \mathsf{i}|\mathsf{f}\rangle\langle \mathsf{f}|\mathsf{m}_k\rangle\langle \mathsf{m}_k|\mathsf{i}\rangle = \gamma_3(\mathsf{i}, \mathsf{m}_k, \mathsf{f}). \end{aligned} \tag{21}$$

通常の弱測定では $|\mathsf{i}\rangle$, $|\mathsf{f}\rangle$ は直交に近いので, ポアンカレ球上では共役点に近い関係にある．したがって, $|\mathsf{m}_k\rangle$ の選びかた次第で, w_m の位相は大きく変化することが分かる．逆に $|\mathsf{i}\rangle$ と $|\mathsf{f}\rangle$ が同じ状態の場合, つまり通常の測定においては位相はゼロになる．弱値には 3 つの量子状態が関与しており, それらによって決まる幾何学的位相が背後で効いていることにあるといえる．弱値の特異なパラメータ依存性が球面 3 角形の面積の性質に関係することが知られている [8, 9].

簡単な例をみておこう． 2 状態系の基底を $(|0\rangle, |1\rangle)$ とする．

$$\begin{aligned} &|\mathsf{i}\rangle = |0\rangle, \quad |\mathsf{f}\rangle = \cos\theta|1\rangle + \sin\theta|0\rangle \\ &|\mathsf{m}_1\rangle = \frac{|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\mathsf{m}_2\rangle = \frac{|0\rangle - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{22}$$

であるとする．射影演算子に対する弱値は

$$w_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\cot\theta), \; w_2 = \tfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\cot\theta)$$

となる．θ が $\pi/2$ に近い場合, すなわち $|\mathsf{i}\rangle$, $|\mathsf{f}\rangle$ の隔たりが小さい場合には, $w_1 \sim 1/2$, $w_2 \sim 1/2$ であり, 古典的直観に近い．逆に θ がゼロに近い場合には, 絶対値が $|\cot\theta|$ の大きい複素数の打ち消しの結果として, $w_1 + w_2 = 1$ が達成されており, 波動の干渉性が大きく効いている．

8　混合状態による選択

事前選択, 事後選択が混合状態の場合の弱演算子は

$$\hat{W} = \frac{\hat{\rho}_{\mathsf{i}}\hat{\rho}_{\mathsf{f}}}{\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_{\mathsf{f}}\rho_{\mathsf{i}}} \tag{23}$$

と定義するのが適当である．$\hat{\rho}_{\mathsf{f}} = |\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$, $\hat{\rho}_{\mathsf{i}} = |\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$ を代入すると, 純粋状態の場合の式 (17) が得られる．

事後選択が完全混合の場合, すなわち, $\hat{\rho}_\mathsf{f} = \hat{1}/n$ の場合の弱演算子は $\hat{W} = \hat{\rho}_\mathsf{i}$ であり, 弱値は $\langle \hat{A} \rangle_\mathrm{w} = \mathrm{Tr}\, \hat{A}\hat{\rho}_\mathsf{i} = \langle \hat{A} \rangle$ となる. つまり, 事後選択がないのと同じであり, 初期状態に対する通常の期待値になる. このことからも, 弱値が通常の期待値の拡張であることがわかる. 事前選択が完全混合の場合も同様の結果が得られるが, 実験的には少し趣の異なった状況になっている.

事後選択が 2 つの状態 $|\mathsf{f}_1\rangle$, $|\mathsf{f}_2\rangle$ の重み p_1, p_2 (≥ 0) の混合の場合を考える. すなわち事後選択が密度演算子 $\hat{\rho}_\mathsf{f} = p_1 |\mathsf{f}_1\rangle\langle \mathsf{f}_1| + p_2 |\mathsf{f}_2\rangle\langle \mathsf{f}_2|$, $p_1 + p_2 = 1$ の場合の弱値は

$$\langle \hat{A} \rangle_\mathrm{w} = \frac{p_1 |\langle \mathsf{i} | \mathsf{f}_1 \rangle|^2 \langle \hat{A} \rangle_\mathrm{w1} + p_2 |\langle \mathsf{i} | \mathsf{f}_2 \rangle|^2 \langle \hat{A} \rangle_\mathrm{w2}}{p_1 |\langle \mathsf{i} | \mathsf{f}_1 \rangle|^2 + p_2 |\langle \mathsf{i} | \mathsf{f}_2 \rangle|^2} \quad (24)$$

となって, 弱値は事後選択に関する重みづき和で表されることがわかる. ただし, $\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}j} = \langle \mathsf{i} | \hat{A} | \mathsf{f}_j \rangle / \langle \mathsf{i} | \mathsf{f}_j \rangle$ $(j = 1, 2)$. 注目すべきは, 絶対値の大きい弱値 (小さい $|\langle \mathsf{i} | \mathsf{f}_j \rangle|$) には小さい重みがつくということである. つまり, 期待値を上回る大きい弱値は事後選択における混合に対して脆弱なのである.

9 波動関数の弱測定

状態ベクトル $|\mathsf{m}_k\rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ が正規直交基底をつくっているとする. 任意の状態ベクトル $|\psi\rangle = |\mathsf{i}\rangle$ を初期状態とみなす. 事後選択の状態を基底の均等な和 $|\mathsf{f}\rangle = (1/\sqrt{n}) \sum_{k=1}^{n} |\mathsf{m}_k\rangle$ と選ぶ.

演算子 $\hat{P}_k = |\mathsf{m}_k\rangle\langle \mathsf{m}_k|$ の弱値は

$$\langle \hat{P}_k \rangle_\mathrm{w} = \psi_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} \psi_k \quad (25)$$

である. $\psi_k = \langle \mathsf{m}_k | \psi \rangle$ は確率振幅, すなわち波動関数である. したがって, k を変えながら, 弱測定を行うことで波動関数 ψ_k を求めることができる. ゲージは基底 $|\mathsf{m}_k\rangle$ の位相の選びかたで固定されている. 連続基底 $|x\rangle$ $(-\infty < x < \infty)$ の場合の波動関数 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ の測定が偏光を用いて行われている [3]. しばしば, 波動関数は, 対応する物理量がない, 複素数である, などの理由で測定できないとされてきたが, 弱測定という枠組では実測可能な量である.

10 まとめ

従来, 弱測定はその不思議な側面, すなわち固有値を越える大きな測定結果が得られることや, 弱値が複素数であることなどが議論の対象とされてきた. ここでは, 弱演算子が密度演算子の自然な拡張であることを示し, その有用性を示すとともに, 弱値の不思議な振舞に幾何学的位相が深くかかわっていることを見てきた.

Aharonov らは, さらに弱測定の部分アンサンブルを援用して, 時間の向きに関して対称な量子論の枠組を作ろうと考えている [10]. また, コンシステント・ヒストリー理論 [11] との関係も指摘されている.

参考文献

[1] Y. Aharonov, D.Z. Albert, and L. Vaidman, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351 (1988).

[2] D. Hosten and P. Kwiat: *Science* **319**, 787 (2008).

[3] J.S. Lundeen, B. Sutherland, A. Patel, C. Stewart, and C. Bamber, *Nature* **474** 188 (2011).

[4] E. Sjöqvist: *J. Phys. A* **359** 187 (2006).

[5] S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **44**, 247 (1956).

[6] Y. Aharonov and L. Vaidman: *Lecture Notes in Physics* **M72**, 369 (2002).

[7] R.P. Feynman: “QED — The strange theory of light and matter”, Princeton University Press (1985).

[8] S. Tamate, H. Kobayashi, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano: *New J. Phys.* **11**, 093025 (2009).

[9] H. Kobayashi, S. Tamate, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano: *J. Phys. Soc. Jpn.* **78**, 034401 (2011).

[10] Y. Aharonov, S. Popescu, and J. Tollasken, *Physics Today*, November (2010) p. 27.

[11] R.B Griffiths: “Consistent Quantum Theory”, Cambridge (2002).

(きたの・まさお, 京都大学工学研究科)