正弦波の電力–とくに無効電力について

北野正雄

平成13 年 6 月 27 日

1 正弦波に対するいろいろな電力の定義

正弦波電圧を $e(t)$, 電流を $i(t)$ と表す;

$$e(t) = 2^{-1/2}(\tilde{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \tilde{E}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}), \quad i(t) = 2^{-1/2}(\tilde{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \tilde{I}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}), \tag{1}$$

ただし, $\tilde{E} = E\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_E}$, $\tilde{I} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_I}$ はフェーザである.

皮相電力 電圧, 電流, それぞれの振幅 E, I の積 $P_\mathrm{A} = EI$ は皮相電力 (apparent power) あるいは, 見かけの電力と呼ばれる. 形式的な量であるが, 以後の議論で用いられる.

瞬時電力 各時刻における電圧, 電流の積 $p(t) = e(t)i(t)$ は瞬時電力 (instantaneous power) と呼ばれ, 任意の波形に対して定義されるものである. 正弦波に対しては, 式 (1) より,

$$\begin{aligned} p(t) &= 2^{-1}(\tilde{E}\tilde{I}^* + \tilde{E}^*\tilde{I}) + 2^{-1}(\tilde{E}\tilde{I}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t} + \tilde{E}^*\tilde{I}^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega t}) \\ &= P_\mathrm{A}\cos(\phi_E - \phi_I) + P_\mathrm{A}\cos(2\omega t + \phi_E + \phi_I) \\ &= P + P_\mathrm{A}\cos 2\left(\omega t + \frac{\phi_E + \phi_I}{2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

となる. $P = P_\mathrm{A}\cos(\phi_E - \phi_I)$ とおいた.

有効電力 式 (2) の時間平均 (1 次モーメント) をとると, 2ω の項は消えて,

$$\langle p(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\,\tilde{E}\tilde{I}^* = P_\mathrm{A}\cos(\phi_\mathrm{E} - \phi_\mathrm{I}) = P \tag{3}$$

P は, 有効電力 (effective power) とよばれる[1].

無効電力 式 (2) で 2ω で振動する成分の振幅は, P_A である. 電流と電圧が同位相または逆位相 ($\phi_E - \phi_I = n\pi$, n: 整数) の場合には, $P_\mathrm{A} = |P|$ であり, 式 (2) から, $p(t)$ の符号が変化することはない. すなわち, 電力の大きさは, 大きく振動しているが, 電力は常に 1 方向に流れている. ところが, $\phi_E - \phi_I \neq n\pi$ の場合には, $P_\mathrm{A} > |P|$ であり, $p(t)$ の符号が時間とともに変化する. ここでは, 電力の一部が往復していることになる. 戻りの電力は, 半周期前の電力の正のピーク付近で負荷側に蓄えられたものである. この状況では, 平均電力 P の輸送に対応する振動振幅 ($|P|$) 以上に過剰に変動している.

[1] P の定義に, 因子 $1/2$ が入らないように, フェーザあるいは実効値の定義に因子 $1/\sqrt{2}$ が入れてある.

名称	定義	単位
瞬時電力	$p(t) = e(t)i(t)$	W
皮相電力	$P_{\mathrm{A}} = \lvert\tilde{E}\rvert\lvert\tilde{I}\rvert$	W, VA (非 SI)
有効電力	$P = \mathrm{Re}\,\tilde{E}\tilde{I}^*$	W
無効電力	$Q = (-)\,\mathrm{Im}\,\tilde{E}\tilde{I}^*$	W, VAR (非 SI)

表 1: 正弦波に対するさまざまな電力

変動を調べるために, 瞬時電力の 2 次の中心モーメント (分散) を求める;

$$\langle (p(t)-P)^2\rangle \frac{1}{T}\int_0^T (p(t)-P)^2\,\mathrm{d}t = \frac{P_{\mathrm{A}}^2}{2} = \frac{P^2+P_{\mathrm{A}}^2-P^2}{2} = \frac{P^2+Q^2}{2} \tag{4}$$

となる. ただし, $Q = \sqrt{P_{\mathrm{A}}^2 - P^2}$. とおいた. Q は過剰な変動分を表しており, 無効電力 (reactive power) と呼ばれる. $Q = P_{\mathrm{A}}\sin(\phi_E - \phi_I) = \mathrm{Im}\,\tilde{E}\tilde{I}^*$ と表すこともできる.

複素電力　さらに, 形式的に

$$P_{\mathrm{c}} = \tilde{E}\tilde{I}^* = P + \mathrm{j}Q \tag{5}$$

などと表し, P_{c} を複素電力と呼ぶこともあるが, 通常のフェーザと物理的な意味がかなり異なるので, 注意が必要である. たとえば, P_{c} の位相 $\phi_E - \phi_I$ は, $p(t)$ の振動位相 [式 (2) 参照] と直接の関係がない[2]. また, Q の符号の与え方にも任意性がある.

無効電力の別の導入法 (標準的)　式 (2) の振動成分に戻る. $\tilde{E}\tilde{I}$ の部分を変形する.

$$\tilde{E}\tilde{I} = EI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_I} = P_{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_I-\phi_E)}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\phi_E} = P_{\mathrm{A}}[\cos(\phi_I-\phi_E) - \mathrm{j}\sin(\phi_I-\phi_E)]\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\phi_E} = (P-\mathrm{j}Q)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\phi_E} \tag{6}$$

これより,

$$p(t) = P + P\cos(2\omega t + 2\phi_E) - Q\sin(2\omega t + 2\phi_E) \tag{7}$$

または,

$$p(t) = P + P\cos(2\omega t + 2\phi_I) + Q\sin(2\omega t + 2\phi_I) \tag{8}$$

右辺 1 項が平均電力, 2 項が平均電力に対応する振動成分, 3 項が過剰な振動成分を与えている.

2　無効電力を考える意義

前節で述べたように, 無効電力は電力の供給元と供給先の間を, 電源周期の倍の周期で往復している電力である. 無効電力が大きくても, 平均電力 (有効電力) が輸送されていれば原理的には何の問題もない. しかし, 電源, 伝送路, 負荷が不完全で損失がある場合には大いに問題が生じる. たとえば, 伝送線に抵抗がある場合には, 無効電力の往復に伴う余分なエネルギー損失が生じることになる[3]. したがって, 電力伝送では電流と電圧の位相が一致するような工夫を行ない, 無効電力を 0 に近づけることが重要な課題になる.

[2] $p(t)$ の符号が逆転している区間の位相角を求めてみよ.
[3] 子供をおつかいに出すのに 1 万円を持たせる状況を考えるとよい. おつりが, 9900 円戻ってくれば原理的には何の問題もないのだが, 道中のリスクを考えると, やはり最初から 100 円持たせるのが望ましい. 釣銭が無効電力に対応している.

例　電圧 $\tilde{E}$ の電圧源から, 抵抗 R の電線を通して負荷に電力を供給する状況を考えてみよう. 電圧の実効値 $E = |\tilde{E}|$ は一定であるとする. R は負荷のインピーダンスに比べて十分小さいと仮定する. 電線で消費される平均電力 P_{loss} は

$$P_{\text{loss}} = \frac{1}{T}\int_0^T Ri(t)^2 \mathrm{d}t = RI^2 = \frac{R}{E^2}P_{\text{A}}^2 \tag{9}$$

である. $I = P_{\text{A}}/E$ を用いた. 負荷に供給される皮相電力と有効電力が等しい場合の, 電線での消費電力 P'_{loss} を差し引くと,

$$P_{\text{loss}} - P'_{\text{loss}} = \frac{R}{E^2}(P_{\text{A}}^2 - P^2) = \frac{R}{E^2}Q^2 \tag{10}$$

となって, 無効電力の 2 乗に比例した過剰損失があることがわかる.

3　電力の単位

無効電力と皮相電力の単位として, W (ワット) を使用することを禁止し, 代わりに, var (volt-ampere reactive), VA (ボルトアンペア) をそれぞれ用いることを指示している教科書が多い. これらは正味運ばれている電力との区別を明確にするため導入された単位である. しかし, 現在, 理学, 工学の全分野でその利用が推奨されている国際単位系 (SI) の考え方 (次元が同じ量は同じ単位を用いる) には, 合致しない[4]. 計量法などにおいては, 慣習との整合性のため, 非 SI 単位である, VAR, VA の利用を認めているが, いずれ削除されると予想される. すべての電力を, W で計るのが合理的である.

[4] そもそも, 量の意味毎に単位を作っていては, 数が多くなって大変である. 複素電圧の実部, 虚部, 絶対値にそれぞれ単位をつけるというのか.